

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Тейлора ряд//Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энцикл., 1988. – С.577.
2. Филер З.Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений//УМЖ, т.33, 1981, №1. - С.123-128.
3. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 336 с.

УДК 518.5

ПОШУК КОМПЛЕКСНИХ КОРЕНІВ

З.Ю. Філер, Г.М. Дреєва

Розробляються методи пошуку комплексних коренів рівнянь (при наявності точок екстремуму функції та для монотонних функцій). Наводяться приклади.

The methods of search complex roots of equalizations are developed (at presence points of extremum of function and for monotonous functions). Examples are made.

Вступ. З появою ЕОМ пошук дійсних коренів функції $f(x)$ перестав бути проблемою. Використання математичних пакетів, графічні методи, при існуванні «далеких» від початку координат коренів – *фінітизація* (наприклад, заміна $x=t/(1-t)$ перетворює вісь ОХ у відрізок (-1; 1)) дають можливість отримати всі *дійсні корені*. Складнішою справою є пошук *комплексних* коренів. У книзі [1, с.205-206] пропонують замінити шуканий корінь $z=x+iy$, перейти до *системи рівнянь* відносно x та y і шукати точку перетину кривих $Re f(x+iy)=0$, $Im f(x+iy)=0$, знявши її з графіка в якості початкового наближення. Особливо складно це, коли таких коренів безліч при однаковій дійсній частині.

Пошук комплексних коренів функції, яка має точки екстремуму. Відомо, що для комплексних коренів *квадратного* рівняння $ax^2 + bx + c=0$, їх дійсна частина $x_0=- b/(2a)$ співпадає з абсцисою точки екстремуму. В околі цієї точки графік двічі неперервно диференційованої функції близький до параболи. Якщо $f(x_0)$ та $f''(x_0)$ мають один знак, а $f'(x_0)=0$ (x_0 – точка екстремуму), то, використовуючи формулу Тейлора до $(x-x_0)^2$: $f(x) \approx f(x_0) + 0.5f''(x_0)(x-x_0)^2$, отримаємо *квадратичне* наближення до $f(x)$ [2]. За умови рівності знаків функції та її другої похідної, відшукання коренів за цим наближенням приводить до комплексних розв'язків

$$x = x_0 \pm i \sqrt{2f(x_0) / f''(x_0)} ; \tag{1}$$

їх можна прийняти за початкове наближення до комплексних коренів рівняння $f(x)=0$. Уточнювати ці корені можна простими ітераціями або ітераціями Ньютонa: $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$.

Так, для рівняння $\sin(x)-0.5x-3=0$ можна знайти як дійсні, так і комплексні корені. Для отримання початкового наближення коренів побудуємо графік функції $\sin(x)-0.5x-3$ (рис. 1).

На ньому видно три дійсних кореня в околі точок $x_1=-8$, $x_2=-6.5$, $x_3=-4.25$, та є підозра на наявність пар комплексних коренів, зокрема, з $\text{Re}(x_4)\approx-13.6$, $\text{Re}(x_5)\approx 1.0$. Для отримання початкових наближень, знаходимо похідні: $f'(x)=(\sin(x)-0.5x-3)'=\cos(x)-0.5$; $f''(x)=(\cos(x)-0.5)'=-\sin(x)$.

Використавши формулу (1), отримаємо перше наближення до комплексно-спряжених коренів: $x_4\approx-13.6\pm i\sqrt{(2(\sin(-13.6)-0.5(-13.6)-3)/(-\sin(-13.6)))}$, $x_5\approx 1.0\pm i\sqrt{(2(\sin(1.0)-0.5(1.0)-3)/(-\sin(1.0)))}$. Тепер можна перейти безпосередньо до уточнення коренів методом Ньютона дійсного кореня:

$$x_{11}:= -8-(\sin(-8)-0.5(-8)-3)/(\cos(-8)-0.5)\approx -7.983513938,$$

$$x_{12}:= -7.983513938-(\sin(-7.983513938)-0.5(-7.983513938)-3)/(\cos(-7.983513938)-0.5)\approx -7.983300078,$$

$$x_{13}:= -7.983300078-(\sin(-7.983300078)-0.5(-7.983300078)-3)/(\cos(-7.983300078)-0.5)\approx -7.983300042.$$

Графік $f(x)=\sin(x)-0.5x-3$ на проміжку $[-15;6]$

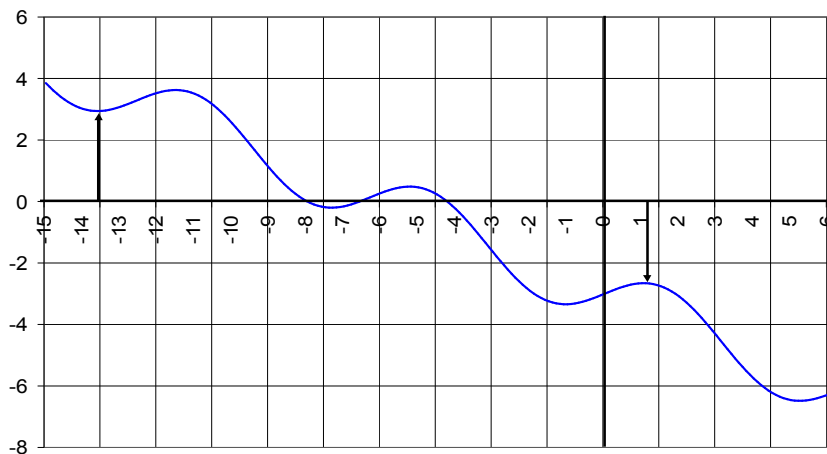


Рис. 1.

Подальші уточнення вказані значущі цифри не змінять. Проведемо процес наближення до комплексного кореню $x_4=-13.6+i2.62$:

$$x_{41}:= -13.6+i2.62-(\sin(-13.6+i2.62)-0.5(-13.6+i2.62)-3)/(\cos(-13.6+i2.62)-0.5)\approx -13.7457+i2.18144.$$

Після чотирьох ітерацій (уточнень) отримаємо значення комплексного кореня, в якому подальші уточнення не змінять значущих цифр:

$$x_{44}=-13.8705+i2.08372.$$

Для точок, де функція і друга похідна мають протилежні знаки ($x_0=-2\pi\pm\pi/3$), також легко знайти хороші початкові наближення й для дійсних коренів за формулою $x = x_0 \pm \sqrt{-2f(x_0)/f''(x_0)}$. Підкореневий вираз тут додатний.

Ще один приклад. Рівняння $f(x)\equiv\text{ch}(x)=0$ розв'язується аналогічно попередньому прикладу. Побудуємо графік $f(x)\equiv\text{ch}(x)$ (рис.2); очевидно, ця

Так, для рівняння $\sin(x)-0.5x-3=0$ можна знайти як дійсні, так і комплексні корені. Для отримання початкового наближення коренів побудуємо графік функції $\sin(x)-0.5x-3$ (рис. 1).

Початкове наближення за формулою (1) до комплексних коренів є $x_{1,2} \approx 0 \pm i\sqrt{(2\text{ch}(0)/\text{ch}(0))} = \pm i\sqrt{2}$. Проведемо декілька уточнень методом Ньютона: $x_{11} = i\sqrt{2} - \text{ch}(i\sqrt{2})/\text{sh}(i\sqrt{2}) \approx i1.57208$; $x_{12} = i1.57079$.

В результаті всього двох ітерацій отримано результат із шістьма вірними знаками. Більш точне значення є $x_1 = i\pi/2 \approx i1.570796$.

Перерізи поверхні $z = |\text{ch}(x+iy)|$

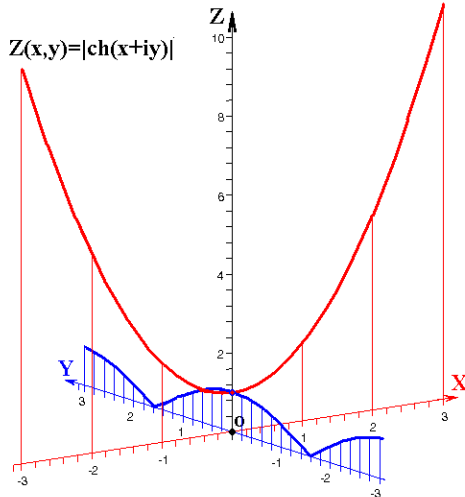


Рис. 2

Поверхня $z = |\text{ch}(x+iy)|$

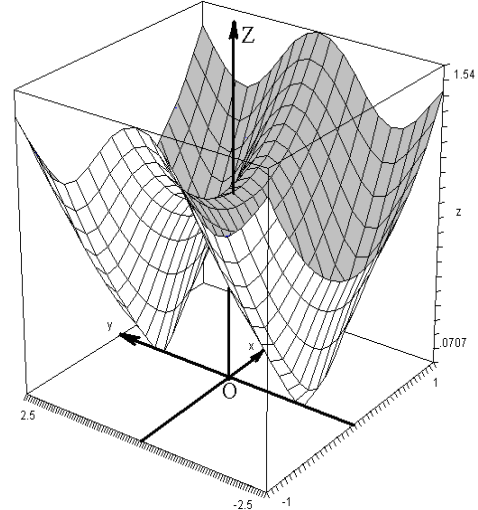


Рис. 3

Приклад відсутності комплексних коренів. Такою функцією, зокрема, є $f(x) = e^{x^2}$. Вона парна й не має й дійсних коренів; при $x \rightarrow \infty$ вона прямує до нескінченності, але для уявного аргументу $x = iy$ при $y \rightarrow \infty$ вона асимптотично прямує до 0. Її поведінку ілюструє графік її модуля (рис.4). Узагалі, показникова функція не рівна нулеві й на комплексній множині.

Комплексні корені монотонної функції. Якщо маємо монотонну функцію $f(x)$ з $f^{(n)}(x) > 0$ похідними ($n=0,1,2,\dots,n$). У цьому випадку шукаємо наближення

Коренів немає

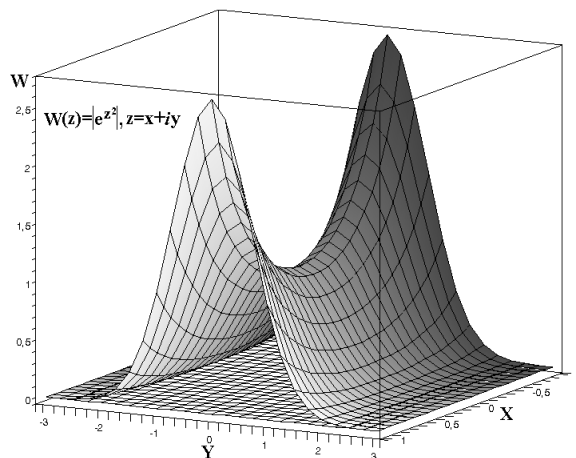


Рис. 4

В околі точки x_0 її розв'язками диференціального рівняння $y'-ky=C$ (тобто, $y''-ky'=0$):

$$y(x) = f(x_0) + \frac{(f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \left(e^{f''(x_0)(x-x_0)/f'(x_0)} - 1 \right).$$

Для вибраного x_0 розв'язуємо рівняння $y(x)=0$:

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \operatorname{Ln} \left(1 - f(x_0) \frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right). \quad (2)$$

Комплексний логарифм дає комплексні наближення до коренів рівняння $f(x)=0$; крім однієї пари комплексно спряжених коренів, також можна отримати й періодичні наближення уявної складової цих коренів.

Простим прикладом монотонної на півосі $(0; \infty)$ є функція $f(x)=e^x+2$, корені якої можна знайти безпосередньо з рівняння $e^x=-2$, звідки, логарифмуючи, отримаємо $x=\ln 2+i(\pi+2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Більш складний приклад. Додамо до функції e^x+2 ще один доданок $1/(x^2+1)$. Для цієї функції $f(x)=e^x+2+1/(x^2+1)$, графік якої показано на рис. 5, перша та друга й третя похідні в околі дійсної частини коренів є додатними числами (1.259282527; 2.074013254; 4.166987420), тому формула (1) не застосовна і потрібно використати наближення (2).

Графік функції $f(x)=e^x+2+1/(x^2+1)$

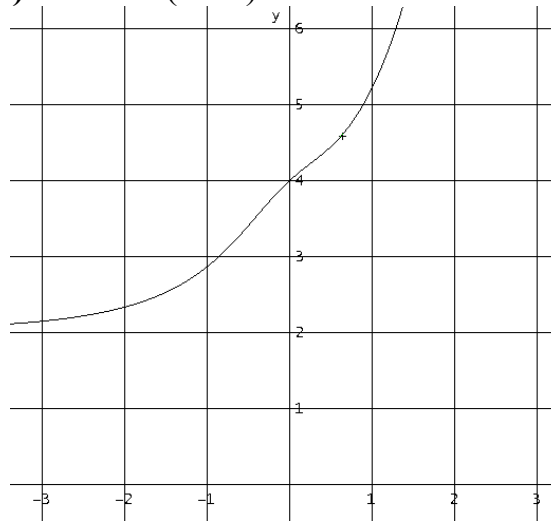


Рис. 5

Початкове значення x_0 беремо «навмання» рівним 1. Тоді першим наближенням до комплексного кореня є $1.607121687+2.165421882i$. Шість ітерацій методом Ньютона дають значення кореня $0.6433856211+3.116789472i$, яке при подальшому уточненні не змінює вказаних значущих цифр.

Поверхня, яку задає модуль $e^x+2+1/(x^2+1)$, показана на рис.6, де видно повторювальність коренів в уявному напрямку (вздовж осі ОУ).

Надії на подальші пошуки. Знаменита дзета-функція Рімана $\zeta(x)$ на проміжку $(0; 1)$ не має дійсних коренів. Вона там монотонно спадає й має полюс в т. $x=1$. За допомогою множника $2^{1-x}-1$, який має корінь $x=1$, отримується нова монотонна функція $\xi(x)$, яка дорівнює теж монотонно

спадна, але приймає лише скінченні значення. При $x=0$ множник дорівнює 1 й тому $\xi(0)=\zeta(0)=-0.5$; $\xi(1)=-\ln 2$, бо на $(0; 1)$ $\xi(x)$ дорівнює сумі «лейбніцевого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$, який при $x=1$ має суму $-\ln 2$ ($\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$).

Поверхня $|e^{x+iy}+2+1/((x+iy)^2+1)|$

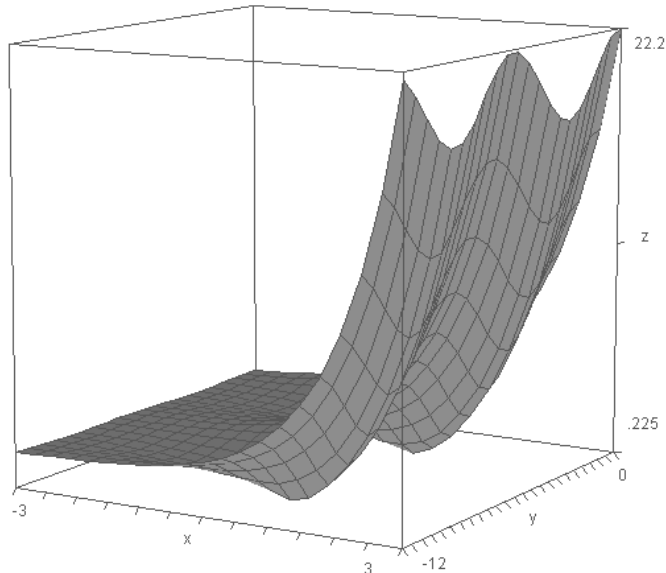


Рис. 6

Всі похідні від цього ряду теж від’ємні, хоча друга похідна близька до нуля. Гіпотеза Рімана стверджує, що дійсні частини всіх комплексних коренів однакові й дорівнюють $\frac{1}{2}$, тобто мають вид $x=\frac{1}{2} \pm iy$ [5]. Довести, що $\text{Re}x=\frac{1}{2}$ за 150 років після висловлення цієї гіпотези, поки не вдалося. Чи вдасться у напрямку пошуку значень уявних частин y_k отримати хороший результат – непогані початкові наближення? Безумовно, наближення типу $y=a+b\exp(kx)$ для цього недостатні, бо для коренів цієї функції маємо $\exp(kx)=-a/b \Rightarrow kx=\text{Ln}(-a/b)=\text{Ln}|a/b|+i(\arg(-a/b)+2\pi n)$. У них спільна дійсна частина $\text{Ln}|a/b|/k$, а уявні частини відстають одна від одної на $2\pi/k$. Можливо, треба шукати функцію виду $y=a+b_1\exp(k_1x)+b_2\exp(k_2x)$. При ірраціональному відношенні k_1/k_2 відстань між коренями змінюється неперіодично, «іррегулярно». Коли вони близькі, то будуть биття у графіках, й місцями корені можуть бути дуже близькими. Можливі й більш складні підходи з використанням розв’язків диференціальних рівнянь 4-го й більш високих порядків. Фактично, уже для розв’язання рівняння $f(x)\equiv \text{ch}(x)=0$, ми застосували узагальнення формули Тейлора на розв’язки диференціального рівняння $L[y]\equiv y''-y=0$. Формула Тейлора буде розв’язки рівняння $y^{(n)}=0$, де лінійний диференціальний оператор $L[y]\equiv y^{(n)}$ [3]. Пошук дійсних коренів за допомогою розвинення функції за узагальненою формулою Тейлора

$\sum_{k=0}^n y^{(k)}(x_0)u_k(x-x_0)+R_n(x,x_0)$ [3] З.Ю.Філер з учнями (зокрема, зі своїм дипломником 1996 р. В.А.Серветним) здійснював ще в 1980-90 рр..

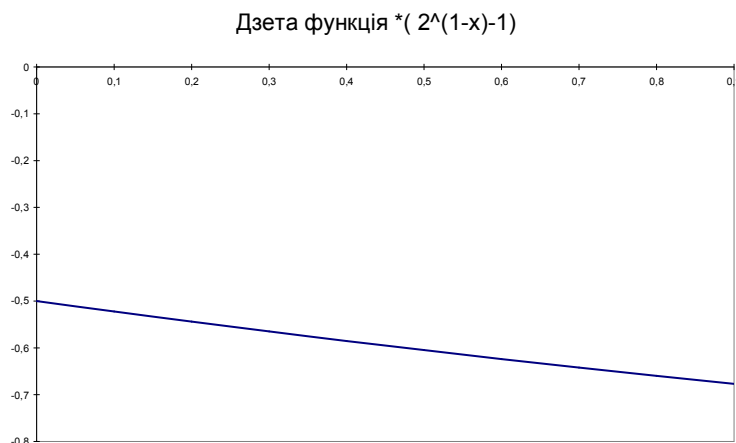


Рис. 7

Знаходження «породжуючої» точки x_0 з рівняння $f'(x)=0$, яке приводить до квадратичного наближення з неповного квадратного рівняння $f(x_0)+0.5 \cdot f''(x_0)(x-x_0)^2=0$, придатний й до комплекснозначної функції. Він особливо корисний для рівнянь виду $f(x)+ax+b=0$, де для x_0 маємо простіше рівняння $f'(x)+ax+b=0$ при трансцендентній функції $f(x)$. Таке рівняння, зокрема, виникає для характеристичного квазіполіному, який відповідає диференціальному рівнянню з післядією [4].

Висновки

1. Запропоновано шукати дійсну частину комплексного кореня в околі дійсних коренів похідної даної функції.
2. Отримана формула для пошуку початкового наближення до пари спряжених комплексних коренів, так і всієї нескінченної множини таких коренів.
3. Пропонується уточнювати ці наближення до коренів методом Ньютона.
4. Для монотонної функції пропонується наближати її за узагальненою формулою Тейлора, побудувавши відповідні лінійні диференціальні оператори.
5. Наведені численні приклади графіків функцій, корені яких відшукуються, на дійсній площині та у просторі.
6. Висловлюється думка про можливу корисність такого підходу до проблеми Рімана про корені дзета-функції.

БІБЛОГРАФІЯ

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с. (Самоучитель).
2. Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні// Математика, її застосування та викладання. Матеріали міжвузів. регіон. конференції 24-25.09.1999. – Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ, 1999. – С. 141 – 145.
3. Филер З.Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений//УМЖ, т.33, 1981, №1- С.123-128.

4. Філер З.Ю., Музиченко О.І. Модифікація та комп'ютерна реалізація критеріїв стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням//Проблеми фізико-математичної та технічної освіти і науки України в контексті євроінтеграції. Збірн. Наук. праць за матер. Наук.-практ. конф. («Вища освіта-2006»). – К.: НПУ ім. Драгоманова, 2007. – С.137-145.

5. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953. – 408 с.

УДК 517.91

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ З ПЕРІОДИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ

З.Ю. Філер, О.І. Музиченко

Розглядається побудова матриці монодромії системи чисельними методами. Умова знаходження коренів характеристичного рівняння цієї матриці в одиничному крузі зведена до підрахунку кількості обертів радіуса-вектора годографа при обході по одиничному колу. Встановлюються запас стійкості та міра нестійкості. Розглядається стійкість чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь.

The construction of matrix monodromy system is examined by numeral methods. The condition of finding roots of characteristic equalization of this matrix in a single circle is erected to the count amount turns radius-vector hodograph at round on a single circle. Set supply of firmness that measure of instability. Firmness of numeral methods of decision of differential equalizations is examined.

Вступ. Аналіз стійкості неавтономних систем вигляду

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), i = 1, 2, \dots, n$$

в деяких випадках зводиться до аналізу стійкості лінійних систем з періодичною матрицею. Коли відома матриця монодромії, або її можна побудувати, з'ясування стійкості системи можна звести до використання спеціального критерію.

Матриця монодромії. Розглянемо лінійну систему

$$dx/dt = A(t)x \tag{1}$$

з неперервною на $(-\infty; +\infty)$ T -періодичною матрицею $A(t)$: $A(t+T) \equiv A(t)$ ($T > 0$). Якщо $X(t)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків системи (1), то на основі тотожності $\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t)$, $X(0) = E$ маємо $X(t+T) \equiv X(t)B$.

Стала матриця B називається *матрицею монодромії* системи.

Критерій: для *асимптотичної стійкості* періодичної системи (1) необхідно і достатньо, щоб усі власні значення ρ матриці монодромії B лежали всередині одиничного круга: $|\rho| < 1$ [1].

Для дослідження періодичних систем на стійкість введемо умову, яка забезпечує належність коренів характеристичного полінома

$$f(\rho) \equiv \det[B - \rho E] \tag{2}$$