Серед загальнотеоретичних та методичних питань з проблеми формування основ інформаційної культури молодших школярів, які потребують подальшого вивчення та розробки, слід назвати: теорія навчального посібника, робочого зошита з основ інформатики для початкової школи; обґрунтування засобів управління процесом навчання молодших школярів основам інформаційної культури; педагогічні основи підготовки дітей до діалогу „учень – комп'ютер" та формування комунікативних умінь при роботі із комп'ютером; уточнення поняття „інформаційна культура", її складників для початкової ланки освіти; організаційно-технологічне забезпечення процесу навчання основам інформаційної культури; система роботи по формуванню операційно-алгоритмічного та функціонального стилів мислення; розвиток процесів уяви і творчості у молодших школярів при роботі з ПК; обґрунтування міри співвідношення формальних та аналогових складників у формуванні інформаційної картини світу; розвиток інформаційної інтуїції.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Державний стандарт початкової загальної освіти // Початкова школа. – 2001. – № 1. – С. 28 – 54.
2. Збірник програм з інформатики для 2 – 11 класів. – Шепетівка: Аспект, 2003. – 128 с.
3. Формування комп'ютерної грамотності учнів: Зб. статей / За ред. І. Ф. Тесленка. – К.: Рад. школа, 1987. – 160 с.
4. Хантер Б. Мои ученики работают на компьютерах: Кн. для учителя / Пер. с англ. – М.: Просвещение, 1989. – 224 с.

УДК 517

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

З.Ю.Філєр

Розглядається класична формула Тейлора для n-разів неперервно диференційованої функції f(x) як розв'язок задачі Коші для найпростішого диференціального рівняння n-го порядку $y^{(n)}= f(x)$; будується її узагальнення більш загального диференціального оператора.

The classic formula of Teylora is examined for n-times of the continuously differentiated function f(x) as solving of task of Koshi for the simplest differential equation of n-order $y^{(n)}= f(x)$; its generalization of more general differential operator is built.

Вступ. Класична формула Тейлора для n-разів неперервно диференційованої функції f(x) як розв'язок задачі Коші для найпростішого диференціального рівняння n-го порядку $y^{(n)}= f(x)$.

Вона має вигляд

$$y(x) = y(x_0) +y'(x_0)(x-x_0)+ y''(x_0)(x-x_0)^2/2+ y'''(x_0)(x-x_0)^3/3!+\dots$$

$+ y^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}/(n-1)!+R_{n-1}(x, x_0),$ (1)

де $R_{n-1}(x, x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}/(n-1)!dt$ - *залишковий член* формули Тейлора, додатковий член до многочлену Тейлора $T_{n-1}(x, x_0)= y(x_0) +y'(x_0)(x-x_0)+ y''(x_0)(x-x_0)^2/2+ y'''(x_0)(x-x_0)^3/3!+\ldots + y^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}/(n-1)!$

Якщо взяти більш загальне рівняння $L_n[y] = f(x)$, де $L_n[y]$ – загальний диференціальний оператор виду $y^{(n)}+a_{n-1} y^{(n-1)}+ a_{n-2} y^{(n-2)}+\ldots+ a_2 y''+ a_1 y'+a_0y$, то отримаємо узагальнення формули Тейлора (1).

1. Узагальнення формули Тейлора за допомогою розв'язків однорідного рівняння $L_n[y] =0$. Як неважко показати, матимемо аналогічну (1) формулу Коші для розв'язку лінійної неоднорідної задачі $L_n[y] = f(x)$:

$y(x) = y(x_0)u_0(x-x_0) +y'(x_0)u_1(x-x_0)+ y''(x_0)u_2(x-x_0) + y'''(x_0)u_3(x-x_0)+\ldots$
$+ y^{(n-1)}(x_0)u_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+R_{n-1}(x, x_0),$ (2)

$R_{n-1}(x, x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)u_{n-1}(x-t)dt$ - (3)

залишковий член в інтегральній формі, $u_k(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння $L_n[y] = 0$, який має в точці x=0 значення k-ої похідної, рівне 1, а всі інші похідні – рівними нулеві (при k=0 – сама функція), тобто ці функції задовольняють умови $u_k^j(0) = \delta_{kj}$ – символ Кронекера.

Класична формула Тейлора (встановлена ним у 1715 р.) представляє функцію y(x) за допомогою степеневих функцій $u_k(x-x_0) = (x-x_0)^k/k!$. У більш складній формі вона була відома ще Й. Бернуллі (1694 р.) [1]. Залишковий член для неї часто представляють у формі Лагранжа.

Для неперервної n-ої похідної

$R_{n-1}(x, x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)u_{n-1}(x-t)^{n-1}dt = f(c)\cdot u_n(x-x_0),$ (4)

а $u_n(x-x_0)=\int_{x_0}^{x} u_{n-1}(t)dt$ - первісна від $u_{n-1}(x)$, рівна 0 при x=0. Тут *c* – деяка *середня* точка інтервалу $(x_0; x)$. Її часто записують у формі $c=x_0+\theta(x-x_0)$, де $0<\theta<1$. Залишковий член в інтегральній формі не містить невідомих «середніх» точок та значень. З неї можна отримати всі відомі форми залишкового члену, зокрема, форми Шльомільха – Роша та Коші з використанням теореми про середнє в інтегралі від добутку неперервної функції на інтегровану знакосталу.

У навчальній та довідковій літературі факторіальний дільник членів, як правило, відносять до відповідного значення похідної, хоча доцільніше його об'єднувати зі степеневим множником, як ми й зробили це у формулі (1). Цей дріб має коефіцієнтом значення похідної даної функції відповідного порядку в точці x_0. Формула дає змогу отримати значення довільної функції за допомогою лише арифметичних операцій. У такій формі формула Тейлора й узагальнюється нами в рівності (2) [2]. Але зараз комп'ютери дають змогу обчислювати вирази, які містять й добутки тригонометричних, гіперболічних та показникових функцій.

2. Від задач теорії коливань. Ми прийшли до формули (2) від задач нелінійної теорії коливань, переходячи від задачі Коші

$$y''+\omega^2 y = f(x,y,y'),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0 \qquad (5)$$

до еквівалентного інтегрального рівняння

$$y(x)=y(x_0)\cos\omega(x-x_0)+y'(x_0)\frac{\sin\omega(x-x_0)}{\omega}+$$

$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t), y'(t)) \frac{\sin\ \omega(x-t)}{\omega}dt$. Звідси отримувався як метод *послідовних наближень* отримання розв'язків у аналітичній формі, так і *чисельний* метод. Для задач пошуку стаціонарних коливань та вивчення перехідного процесу отриманий був алгоритм, який був реалізований і в пакетах прикладних програм для розв'язання задач вітротехніки. Запропоновані автором спеціалізовані чисельні методи застосовувалися ним та пропагувалися ще з початку 70-х років.

Зокрема, для задачі (5) матимемо чисельний метод

$y_1 = y_0\cos(\omega h) + y_0'\sin(\omega h)/\omega + f(x_0,y_0,y_0')(1-\cos(\omega h))/\omega^2$,

$y'_1=- y_0\sin(\omega h)\cdot\omega + y_0'\cos(\omega h) + f(x_0,y_0,y_0')\sin(\omega h)/\omega$.

При малих ωh він переходить у метод ламаних Ейлера.

У 1974 р. автором була зроблена доповідь «Чисельні методи задач теорії коливань» на Всесоюзній школі вчених-механіків з теорії нелінійних коливань у Даугавпілсі. У 1976 р. ним були депоновані у ВІНІТІ дві монографії, присвячені методам інтегральних рівнянь та чисельним методам у теорії нелінійних коливань. У них узагальнена формула Тейлора застосовувалася до розв'язання диференціальних рівнянь, хоча вже тоді були окремі приклади її застосування до розробки чисельних методів пошуку коренів скінчених рівнянь.

Використання описаних підходів можна узагальнити для розв'язання систем квазілінійних диференціальних рівнянь виду

$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $A = (a_{ik})_{nxn}$, $\mathbf{f}=(f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$.

3. Знаходження коренів скінчених рівнянь. Зокрема, у 1976 р. автором була отримана наближена формула

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\mathrm{Ln}\left(1 - f(x_0)\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right). \qquad (5a)$$

Вона використовує наближення функції f(x) в околі точки x_0 розв'язками диференціального рівняння $y' - k\,y = C$ (тобто, $y'' - ky'=0$):

$$y(x) = f(x_0) + \frac{(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\left(e^{f''(x_0)(x-x_0)/f'(x_0)} - 1\right).$$

Ми цю формулу назвали *методом експонент*. Вона аналогічна формулі дотичних Ньютона, але використовує не відрізки дотичних прямих, а відрізки стичних експонент. Це прискорює пошук коренів, використовуючи відому викривленість лінії y= f(x), бо використовує меншу кількість ітерацій, ніж у формулі Ньютона. Для цієї формули студентом-дипломником Донецької політехніки (ДПІ) С.І. Тимченко у 1978 р. під керівництвом автора були отримані оцінки похибки за рахунок використання відповідного залишкового члену, а студентом КДПУ В.А. Сереветним у 1996 р. була створена програма для ЕОМ. Але тоді мова йшла лише про *дійсні* корені рівняння f(x)=0.

Останнього часу ми користаємося формулою (5) для пошуку початкового наближення і до *комплексних коренів* монотонних функцій. Тут x_0 є відповідним *дійсним* початковим наближенням. Для малих значень $f''(x_0)$ формула (5) переходить у класичну формулу Ньютона $x=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$. Нагадаємо, що для множини всіх комплексних розв'язків показникового рівняння $e^z = w$ з комплексними z і w, маємо формулу

$$z=\mathrm{Ln}w=\ln|w|+i(\arg(w)+i2\pi k),\ k\in Z.$$

4. Пошук комплексних коренів в околі точки дійсного екстремуму. Якщо дійсна функція f(x) для дійсного аргументу *x* має екстремум в точці x_0, де знак функції співпадає зі знаком другої похідної (тобто вона має в ній від'ємний максимум чи додатній мінімум), то класичне наближення многочленом Тейлора другого степеня $T_2(x,\ x_0) = f(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$ дає лише два комплексно спряжених кореня

$$x=x_0\pm i\sqrt{2f''(x_0)f(x_0)}\ . \qquad (6)$$

Але якщо є підозра на існування безлічі пар комплексних коренів, то доцільно наближати функцію f(x) розв'язками диференціального рівняння $y''=\omega^2 y$, які мають вигляд $y(x)=y(x_0)\mathrm{ch}\omega(x-x_0)+y'(x_0)\mathrm{sh}\omega(x-x_0)/\omega$. Для точки екстремуму маємо $y'(x_0)=0$, тому для початкового наближення x_0+iy отримаємо рівняння $\mathrm{ch}\omega(iy)=0$. Але $\mathrm{ch}(\omega(iy))=\cos(\omega y)$, тому матимемо просте тригонометричне рівняння для пошуку уявних частин коренів, яке дає $\omega y_к = \pi/2+\pi к,\ к\in Z\Rightarrow y=\pi/2(2к+1)/\omega$. З вибраного диференціального рівняння маємо $\omega^2=y''/y$. Використовуючи початкову точку мінімуму x_0, матимемо $\omega=\sqrt{f''(x_0)/f(x_0)}$. Це й дає початкове наближення до комплексних коренів

$$x=x_0\pm i\pi/2(2к+1)\sqrt{f(x_0)/f''(x_0)}\ . \qquad (7)$$

Далі можна уточнювати отримане початкове наближення за допомогою, наприклад, методу Ньютона (лінеаризації функції, зокрема, й в множині комплексних значень аргументу).

Для квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами уявна частина коренів співпадає з точкою екстремуму. Для не квадратичної функції в околі точки «гладкого» екстремуму здійснюється непогане наближення її наближення за формулою Тейлора $T_2(x,\ x_0)$, що й дозволяє надіятися на близькість дійсної частини кореня до точки екстремуму x_0. Принаймні, відома лема Д'Аламбера дозволяє надіятися, що існує напрямок, який визначається аргументом числа h, вздовж якого значення модуля функції $f(x_0+h)$ зменшується. Вона використовується у доведенні К.Гауссом *основної теореми* алгебри, якому виповнюється вже 210 років. Для многочлену доведено, що таким чином ми можемо дістатися до кореня, який *мінімізує* модуль f(x); для аналітичної функції, яка представлена степеневим рядом, за окремими винятками це теж вірно (якщо цей корінь узагалі існує).

Автором разом з його учнем О.М. Дрєєвим були розглянуті численні приклади пошуку початкових наближень дійсних та комплексних коренів за допомогою отриманих формул. Як класична формула Тейлора, яка використовує наближення у формі многочлена першого (формула Ньютона) та другого (формула (6)) по степенях $(x-x_0)$, так і формули (5) і (7), отримані за допомогою узагальнень формули Тейлора, використовують лише значення функції та її першої та другої похідних у цій точці. Але формула (7) дає лише рівновіддалені наближення значень уявних частин. Для отримання «іррегулярно» розташованих коренів зі спільною дійсною частиною, треба представляти функцію довшими відрізками узагальненого ряду. Наприклад, рівняння $y^{(4)}+\kappa_1 y''+\kappa_2 y=0$ при $\kappa_1^2-4\kappa_2<0$ має розв'язки типу $a_1 ch(\omega_1(x-x_0))+a_2\cdot ch(\omega_2(x-x_0))$. Для коренів $x=x_0\pm iy$ отримаємо тригонометричне рівняння $a_1\cos(\omega_1 y)+a_2\cos(\omega_2 y)=0$. Якщо частоти $\omega_к$ несумірні (їх відношення ірраціонально), то відповідні коливання неперіодичні й послыдовнысть коренів іррегулярна. Таким є розташування коренів і дзета-функції на прямій Rez=1/2. Проблемі Рімана про це виповнюється уже 150 років. Вона була виділена Д.Гільбертом у 1900 р. серед 23 проблем, які 19-те сторіччя заповідало 20-му. Але вже іде 9-й рік 21 сторіччя, а проблема Рімана ще й досі не розв'язана. Не плутати з іншою проблемою Рімана [3]! Можливо, на описаному шляху вдасться зробити кроки, які сприятимуть розв'язанню й цієї проблеми.

Висновки

1. Погляд на формулу Тейлора як на розв'язок задачі Коші, дозволяє її узагальнити, розкладаючи функції по розв'язках лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Це дозволяє будувати аналітичні та чисельні методи інтегрування квазілінійних диференціальних рівнянь.
2. Узагальнена формула Тейлора може застосовуватися для пошуку як і комплексних коренів скінчених рівнянь з отриманням й безлічі коренів з однаковою дійсною частиною. Розробляється спеціальне програмного забезпечення для пошуку таких коренів.
3. Результати можуть бути використані як у теоретичних, так і прикладних дослідженнях, а також у навчальному процесі на фізико-математичних факультетах.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Тейлора ряд//Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энцикл., 1988. – С.577.
2. Филер З.Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений//УМЖ, т.33, 1981, №1. - С.123-128.
3. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 336 с.

УДК 518.5

ПОШУК КОМПЛЕКСНИХ КОРЕНІВ

З.Ю. Філєр, Г.М. Дрєєва

Розробляються методи пошуку комплексних коренів рівнянь (при наявності точок екстремуму функції та для монотонних функцій). Наводяться приклади.

The methods of search complex roots of equalizations are developed (at presence points of extremum of function and for monotonous functions). Examples are made.

Вступ. З появою ЕОМ пошук дійсних коренів функції $f(x)$ перестав бути проблемою. Використання математичних пакетів, графічні методи, при існуванні «далеких» від початку координат коренів – *фінітизація* (наприклад, заміна x=t/(1-t) перетворює вісь OX у відрізок (-1; 1)) дають можливість отримати всі *дійсні корені*. Складнішою справою є пошук *комплексних* коренів. У книзі [1, с.205-206] пропонують замінити шуканий корінь z=x+iy, перейти до *системи рівнянь* відносно x та y і шукати точку перетину кривих $\mathrm{Re} f(x+iy)=0$, $\mathrm{Im}\, f(x+iy)=0$, знявши її з графіка в якості початкового наближення. Особливо складно це, коли таких коренів безліч при однаковій дійсній частині.

Пошук комплексних коренів функції, яка має точки екстремуму. Відомо, що для комплексних коренів *квадратного* рівняння $ax^2+bx+c=0$, їх дійсна частина $x_0=-b/(2a)$ співпадає з абсцисою точки екстремуму. В околі цієї точки графік двічі неперервно диференційованої функції близький до параболи. Якщо $f(x_0)$ та $f''(x_0)$ мають один знак, а $f'(x_0)=0$ (x_0 – точка екстремуму), то, використовуючи формулу Тейлора до $(x-x_0)^2$: $f(x)\approx f(x_0)+0.5f''(x_0)(x-x_0)^2$, отримаємо *квадратичне* наближення до $f(x)$ [2]. За умови рівності знаків функції та її другої похідної, відшукання коренів за цим наближенням приводить до комплексних розв'язків

$$x = x_0 \pm i\sqrt{2f(x_0)/f''(x_0)}\,; \qquad (1)$$

їх можна прийняти за початкове наближення до комплексних коренів рівняння $f(x)=0$. Уточнювати ці корені можна простими ітераціями або ітераціями Ньютона: $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$.

Так, для рівняння $\sin(x)-0.5x-3=0$ можна знайти як дійсні, так і комплексні корені. Для отримання початкового наближення коренів побудуємо графік функції $\sin(x)-0.5x-3$ (рис. 1).