28. Gagarin A., Myrvold W.,Chambers J.The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

29. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, March 2006.

30. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006

УДК 519.53 + 517.987

РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В.А. Романов

Доведена розкладність векторної міри в суму неперервної та цілком розривної міри.

It is proved decomposability of a vector measure into the sum of a continuous and a completely discontinuous measure.

1. Введение. В [1] доказана разложимость неотрицательной меры в сумму непрерывной и вполне H-разрывной меры. В связи с развитием бесконечномерного анализа [2] возникла необходимость исследования векторных мер. Поэтому представляет интерес вопрос о возможности соответствующего обобщения упомянутого результата о разложении.

2. Постановка задачи. Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, У - банахово пространство. Под векторными мерами в X понимаем счетно-аддитивные функции множества конечной полной вариации, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающие значения в пространстве У. В этой и следующей части статьи рассматриваем в пространстве векторных мер сходимость на системе измеримых множеств. Под сдвигом векторной меры Ф на вектор x пространства X понимаем векторную меру Ф [x] , значение которой на каждом борелевском множестве B задается формулой

$$\Phi[x](B) = \Phi(B + x).$$

Определение 1. Векторная мера Ф называется *непрерывной по направлению x* , если для каждого борелевского множества B при стремлении коэффициента c к нулю имеет нулевой предел величина

$$(\Phi[cx] - \Phi)(B).$$

Пусть H - линейное подпространство (не обязательно замкнутое) пространства X . Тогда Ф называется *H-непрерывной* , если она непрерывна по всем направлениям из H .

Определение 2. Векторная мера Ф называется *вполне H-разрывной* , если не существует нетривиальной H-непрерывной векторной меры, вариация которой мажорируется вариацией векторной меры Ф .

Цель статьи состоит в том, чтобы доказать разложимость векторной меры в сумму H-непрерывной и вполне H-разрывной меры.

3. Основные результаты работы.

Лемма 1. *Верхняя грань M семейства H-непрерывных неотрицательных мер M (a) также H-непрерывна.*

Доказательство. Пусть M* - вполне H-разрывная составляющая [1] меры M. Тогда M* не превосходит меру M, а потому абсолютно непрерывна по M . Следовательно, M* представима как произведение некоторой неотрицательной интегрируемой функции T на меру M, а потому совпадает с верхней гранью семейства неотрицательных мер T M (a). Меры T M (a) H-непрерывны как произведения H-непрерывных мер на функцию [3] и мажорируются вполне H-разрывной мерой M* , а потому должны быть нулевыми. Следовательно, верхняя грань семейства таких мер, совпадающая с мерой M* , тоже нулевая, чем и завершается доказательство.

Прежде чем формулировать следующую лемму, напомним, что вариация v(Ф) векторной меры Ф представляет собой неотрицательную меру.

Лемма 2. *Для H-непрерывности векторной меры Ф необходимо и достаточно, чтобы была H-непрерывной ее вариация v (Ф) .*

Необходимость сразу следует из леммы 1 и равенства

$$v (Ф) = \sup v (y^* Ф),$$

где верхняя грань берется по множеству всех линейных непрерывных функционалов y* из единичного шара сопряженного к У пространства.

Достаточность следует из того факта, что для каждого борелевского множества B пространства X , произвольного вектора x подпространства H и любого коэффициента c норма в пространстве У векторной величины

$$(Ф [cx] - Ф) (B)$$

не превосходит значения вариации v (Ф) на симметрической разности множеств B + cx и B .

Лемма 3. *Для вполне H-разрывности векторной меры Ф необходимо и достаточно, чтобы была вполне H-разрывной ее вариация v (Ф) .*

Сначала докажем **необходимость** . Пусть векторная мера Ф вполне H-разрывна. Требуется доказать, что H-непрерывная составляющая ее вариации тривиальна. Умножив эту составляющую на фиксированный вектор пространства У с единичной нормой, получим векторную меру, вариация которой мажорируется вариацией вполне H-разрывной векторной меры Ф, а потому образованная в результате упомянутого умножения векторная мера, а вместе с ней и H-непрерывная составляющая вариации v(Ф), тривиальна.

Теперь докажем **достаточность** . Пусть вариация v(Ф) векторной меры Ф вполне H-разрывна. Требуется доказать, что и сама Ф вполне H-разрывна, то есть что вариация никакой нетривиальной H-непрерывной векторной меры не может мажорироваться вариацией v(Ф). Действительно, если бы такая нетривиальная H-непрерывная векторная мера существовала, то по лемме 2 ее вариация была бы нетривиальной H-непрерывной неотрицательной мерой, что с учетом мажорированности этой вариации вариацией $v(\Phi)$ противоречило бы вполне H-разрывности Φ. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть H -линейное подпространство сепарабельного пространства Фреше X. Тогда каждую векторную меру Φ в пространстве X можно, причем однозначно, разложить в сумму H-непрерывной векторной меры $\Phi(1)$ и вполне H-разрывной векторной меры $\Phi(2)$.*

Доказательство. Пусть $M = v(\Phi)$ - вариация векторной меры Φ, $M(1)$ - H-непрерывная, а $M(2)$ - вполне H-разрывная составляющая указанной вариации.

Поскольку H-непрерывная и вполне H-разрывная неотрицательные меры всегда взаимно сингулярны [3] , то найдутся непересекающиеся борелевские множества $A(1)$ и $A(2)$, на которых сосредоточены соответственно $M(1)$ и $M(2)$.

Для каждого борелевского множества B зададим значение новой векторной меры $\Phi(1)$ на этом множестве как векторную величину, равную значению векторной меры Φ на пересечении множеств B и $A(1)$, а также зададим на B значение еще одной векторной меры $\Phi(2)$ как векторную величину, равную значению Φ на пересечении множеств B и $A(2)$.

Поскольку вариация векторной меры Φ сосредоточена на объединении множеств $A(1)$ и $A(2)$, на которых сосредоточены ее H-непрерывная и вполне H-разрывная составляющая, то отсюда с учетом дизъюнктности указанных множеств следует, что для построенных векторных мер $\Phi(1)$ и $\Phi(2)$ выполняется равенство

$$\Phi = \Phi(1) + \Phi(2) .$$

Докажем, что полученное разложение векторной меры Φ есть разложение в сумму H-непрерывной и вполне H-разрывной векторной меры.

Согласно определению вариации векторной меры, для каждого борелевского множества B значение вариации $v(\Phi(1))(B)$ векторной меры $\Phi(1)$ на B равно верхней грани по всем системам из конечного числа попарно непересекающихся борелевских подмножеств $B(к)$ множества B сумм норм значений $\Phi(1)$ на множествах $B(к)$. Поскольку эти последние равны нормам значений векторной меры Φ на пересечениях упомянутых множеств $B(к)$ с фиксированным множеством $A(1)$, то отсюда следует, что значение вариации векторной меры $\Phi(1)$ на множестве B совпадает со значением вариации векторной меры Φ на пересечении множества B с множеством $A(1)$, которое в свою очередь равно значению неотрицательной меры M на указанном пересечении и, следовательно, значению неотрицательной меры $M(1)$ на самом множестве B .

Итак, для каждого борелевского множества B выполняется равенство

$$v(\Phi(1))(B) = M(1)(B) ,$$

а потому вариация векторной меры $\Phi(1)$ совпадает с H-непрерывной неотрицательной мерой $M(1)$ и, следовательно, тоже H-непрерывна.

По аналогичным соображениям выполняется равенство

$$v(\Phi(2)) = M(2),$$

а потому вариация векторной меры $\Phi(2)$ вполне H-разрывна. Отсюда и из леммы 3 следует, что и сама векторная мера $\Phi(2)$ H-разрывна.

Таким образом, **существование** разложения доказано.

Для доказательства **единственности** предположим, что

$$\Phi = \Phi(1) + \Phi(2) = T(1) + T(2),$$

где векторные $\Phi(1)$ и $T(1)$ H-непрерывны, а $\Phi(2)$ и $T(2)$ вполне H-разрывны. Но тогда векторная мера

$$\Phi(1) - T(1) = T(2) - \Phi(2)$$

одновременно H-непрерывна и вполне H-разрывна, а потому тривиальна.Следовательно, $\Phi(1) = T(1)$ и $\Phi(2) = T(2)$. Теорема доказана.

4.Замечания и примеры.

Замечание 1. Если в пространстве векторных мер задать сходимость по вариации, а непрерывность по направлению x определить как существование при стремлении коэффициента c к нулю нулевого предела величины

$$\mathrm{Var}(\Phi[cx] - \Phi),$$

где Var означает полную вариацию, то для векторной меры Φ выделить максимальную H-непрерывную составляющую будет, вообще говоря, невозможно. Об этом свидетельствует пример 1.

Пример 1. В качестве пространства X и его подпространства H возьмем числовую прямую, а в качестве вектора x возьмем 1. Занумеруем множество рациональных чисел отрезка [0 ; 1] в одну бесконечную последовательность $(p(k))$. Пусть Φ - векторная мера со значениями в пространстве ограниченных последовательностей, скалярные компоненты которой абсолютно непрерывны по одномерной инвариантной мере Лебега и имеют относительно последней плотности, равные характеристическим функциям отрезков $[0 ; p(k)]$. Согласно теореме 1 из [4], такая векторная мера Φ не является H-непрерывной относительно сходимости по вариации. Предположим, что Φ можно разложить в сумму вариационно H-непрерывной векторной меры $\Phi(1)$ и такой векторной меры $\Phi(2)$, что вариация последней не мажорирует вариацию ни одной нетривиальной вариационно H-непрерывной векторной меры. Поскольку Φ не имеет свойства вариационной H-непрерывности, то составляющая $\Phi(2)$ ее разложения нетривиальна. Поскольку $\Phi(2) = \Phi - \Phi(1)$, то скалярные компоненты векторной меры $\Phi(2)$ представимы как разности соответствующих скалярных компонент векторных мер Φ и $\Phi(1)$. Из H-непрерывности векторной меры $\Phi(1)$ вытекает H-непрерывность ее скалярных компонент. Следовательно, скалярные компоненты векторной меры $\Phi(1)$, представляющие собой меры на прямой, абсолютно непрерывны по одномерной инвариантной мере Лебега. Из построения векторной меры Φ

следует, что ее скалярные компоненты также абсолютно непрерывны по указанной мере Лебега. Таким образом, скалярные компоненты векторной меры $\Phi(2)$ представимы как разности абсолютно непрерывных по инвариантной мере Лебега мер, а потому сами абсолютно непрерывны по указанной мере. Поскольку векторная мера $\Phi(2)$ нетривиальна, то существует такое натуральное $к$, что ее к-тая скалярная компонента тоже нетривиальна. Рассмотрим теперь векторную меру, для которой к-тая компонента совпадает с к-той компонентой векторной меры $\Phi(2)$, а остальные компоненты суть нулевые меры. Такая векторная мера нетривиальна, вариационно H-непрерывна, а ее вариация мажорируется вариацией векторной меры $\Phi(2)$. Получено противоречие с определяющим свойством векторной меры $\Phi(2)$, а потому наше предположение о возможности разложения векторной меры Φ данного примера в сумму вариационно H-непрерывной и вполне вариационно H-разрывной векторной меры было неверным. Таким образом, для непрерывности по вариации не для каждой векторной меры даже в случае одномерного подпространства H (и , что еще более важно, даже в случае одномерного пространства X) можно выделить максимальную H-непрерывную составляющую.

Замечание 2. Сходимость относительно полувариации тоже не всегда позволяет выделить максимальную H-непрерывную составляющую векторной меры . Об этом свидетельствует пример 2.

Пример 2. В качестве пространства X и его подпространства H снова возьмем числовую прямую, а в качестве вектора x возьмем 1 . На отрезке [0; 1] для каждого натурального p зададим множество $E(p)$ как объединение p отрезков вида $[\,к/p\,;\,(2к+1)/2p\,]$, где целое число $к$ изменяется от 0 до $p-1$. Рассмотрим теперь векторную меру Φ со значениями в пространстве ограниченных последовательностей, скалярные компоненты которой абсолютно непрерывны по одномерной инвариантной мере Лебега и имеют относительно последней плотности, равные характеристическим функциям множеств $E(p)$. Согласно теореме 2 из [4] , такая векторная мера не имеет свойства H-непрерывности относительно полувариационной сходимости. Далее с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям предыдущего примера, можно доказать неразложимость векторной меры Φ в сумму полувариационно H-непрерывной векторной меры и такой векторной меры, вариация которой не может мажорировать вариацию ни одной нетривиальной полувариационно H-непрерывной векторной меры.

Замечание 3. Как и определения непрерывности (для различных видов сходимости), определения дифференцируемости векторной меры для сходимостей по вариации, относительно полувариации и на системе измеримых множеств попарно неэквивалентны [5] . В случае же скалярных мер определения дифференцируемости (как и определения непрерывности) для указанных видов сходимости эквивалентны. Но даже для неотрицательных мер невозможно выделить максимальную дифференцируемую составляющую [1, замечание 2]. Следовательно, это невозможно сделать для каждого из указанных видов дифференцируемых векторных мер.

Замечание 4. Таким образом, из трех упомянутых видов непрерывности и трех видов дифференцируемости векторных мер только в одном случае - для непрерывности относительно сходимости на системе измеримых множеств - гарантируется возможность выделения максимальной составляющей с заданным свойством.

Чтобы построить примеры выделения максимальной H-непрерывной составляющей, снова (как и в частях 2 и 3) возвратимся к сходимости на системе измеримых множеств.

Пример 3. Пусть X - бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, H - линейная оболочка его ортонормированного базиса, M - вероятностная мера-произведение, одномерные сомножители которой представляют собой вероятностные меры на прямых, порожденных векторами упомянутого базиса. Поскольку такое H всюду плотно в X , то конечномерные проекции H-непрерывной меры должны быть абсолютно непрерывными по соответствующим конечномерным мерам Лебега [3, 84], а потому H-непрерывная составляющая меры M представляет собой меру-произведение, одномерные сомножители которой равны абсолютно непрерывным составляющим одномерных сомножителей меры M .

Пример 3 относился к ситуации, когда мера задана в бесконечномерном пространстве X , но принимает свои значения в одномерном пространстве. Теперь рассмотрим пример векторной меры, для которой оба упомянутых пространства бесконечномерны.

Пример 4. В качестве пространства X снова возьмем бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, в качестве H - линейную оболочку его ортонормированного базиса, а в качестве пространства У значений векторной меры на этот раз возьмем пространство квадратично суммируемых последовательностей. Пусть M(к) - счетный набор вероятностных мер-произведений такого вида, как в предыдущем примере. Обозначим через T(к) H-непрерывные составляющие мер M(к) . Пусть (у(к)) - фиксированная квадратично суммируемая числовая последовательность (к = 1,2,…), а Ф - векторная мера, скалярные компоненты которой равны у(к)M(к) .Тогда H-непрерывная составляющая векторной меры Ф имеет своими скалярными компонентами числовые меры у(к)T(к) .

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Романов В.А. О разложении меры в линейном пространстве в сумму H- // Вестник Моск. Ун-та. Серия 1. Матем., мех. – 1976 - 31, № 4. – С. 63-66.

2. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

3. Романов В.А. Об Н-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Вестник Моск. Ун-та. Серия 1. Матем., мех. – 32, № 1 . – С. 81-85.

4. Романов В.А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Матем. Заметки Российской академии наук. – 1995. – 57, № 2. - С. 310-312.

5. Романов В.А. О неэквивалентности различных определений дифференцируемости для векторных мер // Там же. – 2002. – 72, № 4. – С. 528-534.

УДК 511.0

ПРО ПОШУК ПРОСТИХ ЧИСЕЛ НА ПРОМІЖКУ [N, 2N]

В.М. Сипко

Предлагается модификация решета Эратосфена для поиска простых чисел.

Modification of Eratosthenes sieve is offered for the searth of prime nambers.

Теорема. *Нехай* $\boldsymbol{n}$ *довільне натуральне число, яке більше* 1, *а* $\boldsymbol{m}$ *довільне непарне число з проміжку* $[1,n]$. *Тоді число* $2\boldsymbol{n}\text{-}\boldsymbol{m}$ *буде простим тоді і тільки тоді, коли* $n \neq \frac{1}{2}(p+m)(\operatorname{mod} p)$ *для всякого простого числа р з проміжку* $[3,\sqrt{2n}]$ (тобто, остачі від ділення n на p не дорівнюють остачам від ділення $(p+m)/2$ на p).

Д о в е д е н н я .

Необхідність. Нехай число $2n\text{-}m$ просте. Доведемо, що $n \neq \frac{1}{2}(p+m)(\operatorname{mod} p), \forall p \in [3,\sqrt{2n}]$, тобто, $\forall p \in [3,\sqrt{2n}]$ число $n-\frac{1}{2}(p+m)$ не ділиться на p. Припустимо, що це не так, тобто, існує таке p з проміжку $[3,\sqrt{2n}]$, що число $n-\frac{1}{2}(p+m)$ ділиться на p, а звідси випливатиме, що і число $2n-(p+m)$ ділитиметься на p, а, отже*,* і число $2n\text{-}m$ буде ділитись на p, що протирічить умові теореми.

Достатність. Нехай $n \neq \frac{1}{2}(p+m)(\operatorname{mod} p), \forall p \in [3,\sqrt{2n}]$. Доведемо, що число $2n\text{-}m$ буде простим. Припустимо протилежне: число $2n\text{-}m$ не просте. Це означатиме, що в проміжку $[3,\sqrt{2n}]$ знайдеться просте p таке, що число $2n\text{-}m$ ділиться на p, тобто, $2n-m \equiv 0(\operatorname{mod} p)$, а це рівносильне тому, що $2n \equiv m(\operatorname{mod} p)$, що, в свою чергу, рівносильне $2n \equiv (m+p)(\operatorname{mod} p)$, а звідси $n \equiv \frac{1}{2}(p+m)(\operatorname{mod} p)$, що протирічить умові теореми.

Наслідок 1.

Нехай $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *всі непарні числа з проміжку* $[1,n]$, *для яких*