5. Статистичний щорічник Кіровоградської області за 2006 рік . – Кіровоград: Головне управління статистики у Кіровоградській області, 2007 – 485 с.

УДК 519.115

КОРОТКИЙ ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ПРО ГРАФИ, ЩО НЕ ПРИВОДЯТЬСЯ НАД ЗАДАНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

В. І. Петренюк

Нашою метою є: 1) короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із задачею опису всіх графів, що не приводяться (або мінімальних), над заданою поверхнею S. 2) теорема 1 як початок дослідження структури k –планарних графів.

There are two parts: 1) brief report about main results of new and oldest articles devoted studying of irreducible graphs for given surface or obstructions for given surface, 2) theorem 1 as a result of beginner research structure of k-planar graphs with genera 0 .

Нехай G неорієнтований граф без петель і кратних ребер ейлеревого роду $\gamma(G)$, а S замкнута орієнтована поверхня роду $\gamma(S)$ без краю, де $\gamma(G)=\gamma(S)+1$.

Означення 1. Граф G називається таким, що не приводиться над S або $\gamma(G)$–неприведеним (irreducible), якщо для будь-якого власного підграфа H графаG має місце нерівність:$\gamma(H)\le\gamma(S)<\gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$–неприведених графів позначимо через ζ(S).

Означення 2. Граф G мінімальний над S, якщо для будь-якого графаG', отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G')\le\gamma(S)<\gamma(G)$. Множина всіх графів мінімальних надS позначимо через Γ_S. Ці визначення 1,2 узяті з [9], [16], відповідно. Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S і характеризує множину всіх графів роду не менше $\gamma(S)+1$. ЯкщоS 2–сфера, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Нашою метою є короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із задачею опису всіх графів, що неприводяться (або мінімальних), над поверхнею S. Більш докладний огляд приведений в [15], [30]. А також розпочато дослідження структури k –планарних графів.

1. Хай S орієнтовна замкнута поверхня роду $\gamma(S)>0, \gamma(S)=n-1$.

Задача опису всіх графів, що неприводяться над S зводиться, як показано в [24] до задачі опису всіх блоків, тобто графів без точок зчленування, що неприводяться над S,. Доведено, що графи B_1, B_2, B_3, $K_{3,7}$ - блоки, що неприводяться, а $G_n - n$ – блок, що не приводиться при $n>1$. Граф G_n був побудований в [1], а в [9] було доведено, що є три 2 – неприведених підграфи графа K_8, а саме: $B_1=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1\right)$, $B_2=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus \left(K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1\right)\right)$, $B_3=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1\right)$.

В [11] розв'язувалася ця ж задача, але один з приведених графів містить підграф ізоморфний B_3, тобто має зайве ребро. Граф $K_{3,7}$ приведений в [12], де було доведене, що $K_{3,11}$ мінімальний блок над подвійним тором σ_2. В [11], [12] доведено, що графи B_1, B_2, $K_{3,7}$ – мінімальне над тором σ_1. В [12] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3}-(p+1)$ – мінімальний блок, де $p>0$. Хай S – проективна площина. Виділимо наступні два напрями робіт, пов'язані з описом не приводяться над S графів. Одне з них було засноване Вагнером(Wagner), який ввів в [22], [23] поняття мінімального базису для множини кінцевих графів не вкладених в S і застосував для опису мінімальних графів над проективною площиною. В роботах [3] - [6] були продовжені дослідження і знайдені деякі мінімальні графи над S. Мінімальний базис множини всіх кінцевих графів не вкладених в *S*, що складається з 12 графів, був побудований в роботах [7] [8]. Інший напрям бере початок в [20], [21], де були описані всі кубічні графи над проективною площиною, що не приводяться. Авторами роботи [11] був даний огляд отриманих ними результатів і було доведено, що є скінчена множина графів, що неприводяться над проективною площиною. Список з 103 таких графів був побудований в [12], де було виказано припущення, що список повний. Опис цієї роботи приведений в [14] В [1] представлений план доказу того, що вказаний в [12] список є повним. Автор стверджує, що їм побудовано 5 графів, з яких інші виходять операцією розщеплювання вершин і видалення ребер. Відзначимо, що в [21] а потім [13] були описані всі кубічні графи, що не приводяться над проективною площиною.

Нехай S – неорієнтована замкнута поверхня. В [19] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні *S* ейлеревої характеристики – 1.

Для повноти уяви про кількість приведемо таблицю 1 з [15] використовуючи прийняті нами позначення, де Ω_p – неорієнтована замкнута поверхня роду p.

S Число	**σ**	**σ_1**	**Ω_1**	**Ω_2**
$\alpha_0(\zeta(S))$	2	>300	≥103	$>10^5$
Кубічних графів в ζ(S)	1	≥14	6	?
Незв'язаних графів в ζ(S)	0	3	3	≥204
Графів з точкою зчленування	0	10	10	>4200

Помітимо, що в [15] немає посилання на джерела інформації про число графів з множини $\zeta(\Omega_2)$. Наведено в [29] повний список 2-неприведених графів із 9-ма вершинами, але побачити його немає можливості.

2. Нехай G неорієнтований граф без петель і кратних ребер, який має рід $\gamma(G)$, де δ_Δ - замкнута неорієнтована поверхня роду $\gamma(\delta)=\Delta$ $\Delta=0, G=(G^0,G^1)$.

Граф G зватимемо незведеним над S, або $\gamma(G)$-незведеним (obstruction), якщо для довільного ребра $u \in G^1$ має місце нерівність $\gamma(G \setminus u) \leq \gamma(\delta_\Delta) < \gamma(G)$.

Розглянемо задачу побудови 2-незведених графів та почнемо із споглядання результатів отриманих [0],[5]. В [28], [27] виписані 2-неприведені графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$.

Твердження 1. G_n не є n–незведеним, при n>1.

Доведемо це для n=2, зваживши на те, що граф G_2 є φ-образом графа Y_2 і квазізірки $St(Z_8)$ визначено на множені вершин Z_2^0 і $St(Z_8)\setminus\{Z_8^0\}$, де Z_8 простий цикл довжини 8; квазізірка $St(Z_8)$ утворена з Z_8 шляхом "приклеювання" до вершин циклу вершин, сполучених ребрами, що висять з вершинами циклу.

Граф Y_2, де $K', K'' = K_4 \in \varphi$ образом графів K', K'' при φ - перетворенні визначеному на циклі довжини 4, існує φ - перетворення φ_2 :

$$\varphi_2\left(K'+K'', \sum_{i=1}^{8} a_{1i} + a_{2i}\right) = \left(Y_2, \sum_{i=1}^{4} a_i^*\right)$$ де

$\{a_{1i}\}_1^8 \subset (K')^\circ \cup (K')^{'}, \{a_{2i}\}_1^4 \subset (K'')^\circ \cup (K'')^1, (a_i^*) \subset Y_2^0$ причому одночасно a_{1i} і a_{2i} не є вершинами чи внутрішніми точками ребер (див. рис 0.).

Стверджуємо, що існує 2-кліткове вкладення $f: Y_1 \to \delta_1$ при якому $f(Y_1^0) \subset \partial\Delta$, де $\Delta \in \delta_1 \setminus f(Y_1^0 \cup Y_1^1)$. Для наочності наведемо рис.1.

Очевидно всі вершини графа Y_2 належать межі δ_1 2 – клітки Δ, $\Delta \in \partial_1(Y_2)$ і Y_1^0 досяжна на δ_1. Для графа G_2 існує φ- перетворення графа $Y_2 + St(Z_8)$, де $\varphi\left(Y_2 + St(Z_8), \sum_{i=1}^{8}(y_i + g_i)\right) = \left(G_2, \{a_i^*\}_1^8\right)$

де $\{y_i\}_1^8 \subset Y_2, S^\circ t(Z_8) \setminus (Z_8)^\circ = \{g_i\}_1^8, \{a_1^*\}_1^8 \subset G_n^0$.

Відповідно до цього φ - перетворенням можливо продовжити вкладення f графа Y_2 в δ_1. Для цього слід покласти, що $f'(Y_2) = f'(G_2 \setminus \varphi(St(Z_8)) \setminus \{g_i\}_1^8)$; $f'(St^1(Z_8)) \subset \Delta$, де $f'(Y_2^0) \subset \partial\Delta, \Delta \in \delta_1(Y_2, f)$. Тоді маємо, що $\gamma(G_2) = 1$.

Доведення для $n = 3$ здійснимо аналогічно, використавши вкладення графа Y_3 в δ_2, де граф Y_3 - є φ - образом графа $Y_3 + K_4$ визначеним аналогічно φ перетворення φ_2 для Y_2. Тільки вершини цикла Z_4 з K_4 будемо „приклеювати" до внутрішніх вершин ребер $(a_1, a_2), (a_5, a_6)$ графа Y_2. На рис.2 приведені вкладення $f', f'': Y_3 \to \delta_2$ при якому $f''(Y_3^0) \subset \partial\Delta, \delta_3 \setminus (f'(Y_3))$, тобто множина всіх вершин графа Y_3 досяжна на δ_2. Для G_3 існує φ - перетворення графа $Y_3 + St(Z_{12})$ аналогічне наведеному вище для G_2, а вкладення $f''': Y_3 \to \delta_2$ продовжимо таким шляхом до: $f''': Y_3 \to \delta_2$, щоб мали місце співвідношення: $f''(\mathrm{Y}_2) = f'''\big(G_2 \setminus \varphi\big(St(Z_{12}) \setminus \{g_i\}_1^{12}\big)\big)$; $f'''\big(St(Z_{12}) \setminus \{g_i\}_1^{12}\big) \subset \Delta$, де $f''\big(\mathrm{Y}_3^0\big) \subset \partial_1, \Delta \in \delta_2(\mathrm{Y}_2, f)$. Тоді маємо, що $\gamma(G_3) = 2$, твердження доведено.

Означення 3. Називатимемо площинний граф G k– планарним, якщо число досяжності його множини вершин дорівнює k, k> 1.

Означення 4. Називатимемо граф G t-мінімальним над *S*, якщо для будь-якого графа $G`$, отриманого із графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \le \gamma(S) < \gamma(G)$ і зменшується число досяжності множини вершин цього графа *G*.

Лема 1. Якщо G – k –планарний граф, то мають місце наступні твердження:

1) Існує H – частина графа G гомеоморфна деякому k–мінімальному графу або що стягується до нього;
2) Не існує H’ - частини графа G гомеоморфної, або такої що стягується до k +1 –мінімального графу.

Доведення. Нехай G k–планарний граф. Для доведення використовуємо метод від оберненого. Припустимо, що не існує такій частині H графа G, яка була б гомеоморфною або стягувалася до деякого k – мінімальному графу. Розглянемо підмножину η множини G^1, що складається зі всіх тих ребер графа G, що неістотні відносно k при операції видалення. Позначимо через G_1 граф G– η, де $G_1 = (G^0, G^1 - \eta)$. Можливо, що граф G_1 матиме ізольовані вершини, які є неістотними при обчисленні числа досяжності його множини вершин. Тоді виконуються наступні співвідношення:
а) $(t_{G_1}(G_1^0) = t_G\big(G^0\big) = k)$;

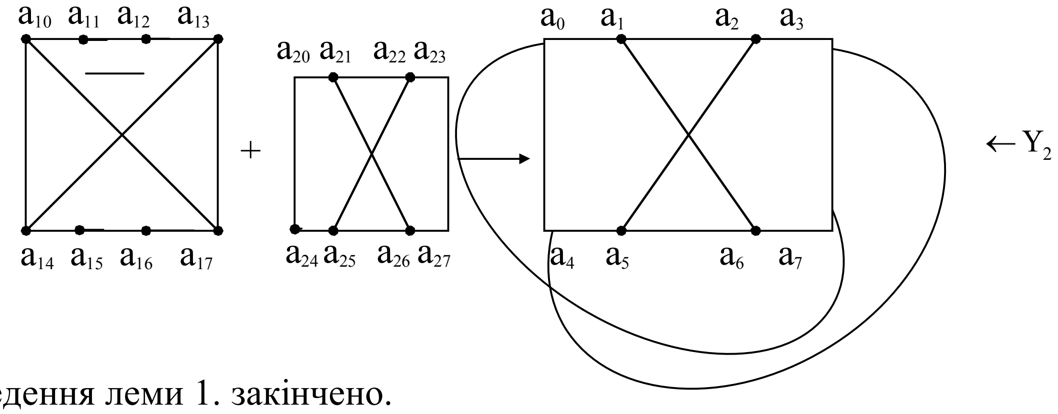
б) $(\forall u \in G_1^1)(t_{G_1 \setminus u}(G_1^0) < k)$.

З означення 2[6] отримаємо, що граф G_1 гомеоморфний k – мінімальному графу. Для того, щоб отримати із графа G_1 k – мінімальний граф потрібно виконати операцію ототожнення кожної вершини з множини *M*, де

M $=\{\forall$ a, a$\in G_1^0/t_{G1}(G_1^0 \setminus \{a\}) = t_G(G^0) = k\}$, або з однією з суміжних вершин з множини *M*, або множини $G_1^0 \setminus M$. Отримаємо суперечність зробленому припущенню. Припущення невірне. Отже, k – планарний граф G містить

Рис. 0. Граф Y_2, де $K', K'' = K_4$, є φ-образом графів K', K'' при φ-перетворенні визначеному на циклі довжини 4.

частину G_1 гомеоморфну одному з k – мінімальних графів. Твердження 1) доведено. Безпосередньо з визначення 3 витікає доведення твердження 2).



Доведення леми 1. закінчено.

Теорема 1. Граф G k – планарний тоді і тільки тоді, коли існує частина графа G гомеоморфна деякому k –мінімальному графа і не існує частині графа G гомеоморфно k + 1 мінімальному графу.

Доведення. Нехай G-k–планарний граф. Згідно леми 1 існує підграф H графа G, або його частина гомеоморфна деякому k –мінімальному графу і не існує частини H графа G гомеоморфної деякому k+1 мінімальному графу. Якщо граф G містить частину H, то отримаємо нерівність $t_G(G^0) \geq k$, а з того факту, що не містить частини H, маємо нерівність $t_G(G^0) \geq k + 1$.

Якщо граф G містить частину H' гомеоморфну деякому k–мінімальному графу, то отримаємо нерівність $t_G(G^0) \geq k$. Якщо ж граф G не містить такої частини H, що була б гомеоморфно деякому k+1–мінімальному графу, то отримаємо нерівність $t_G(G^0)<k+1$. Отже виконується рівність $t_G(G^0)=k$, що вимагалося довести. Доведення теореми закінчено.

Опис структурних властивостей плоских графів із заданим числом досяжності заданої множини вершин наведено в [25], а в [26] подано характеризацію 3-мінімальних площинних графів, яка встановлює необхідні умови 3-планарності площинних графів.

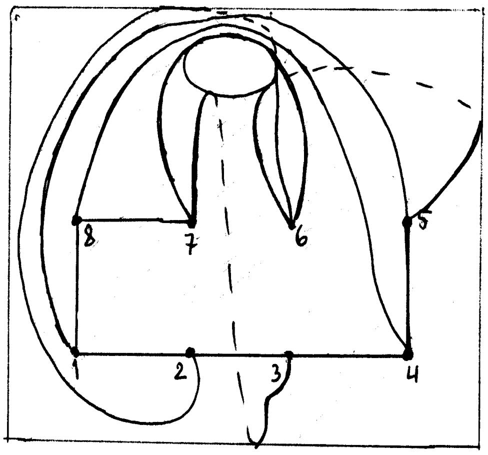


Рис 1. Вкладення графа в тор.

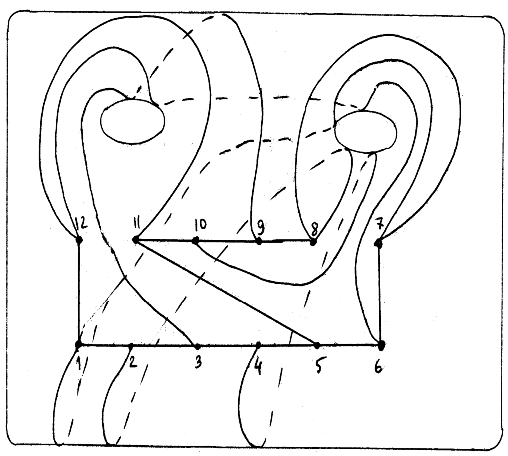


Рис. 2. Вкладення $f', f'': Y_3 \to \delta_2$ $f''\left(Y_3^0\right) \subset \partial\Delta_1\delta_3 \setminus \left(f'(Y_3)\right)$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T.The embedding graphs in manifolds.J. Math. and Mech. 12 (1963) 629 – 634.

2. Archdeacon D. A Kuratawski theorem for projective plane.J. Graph theory 1981, 5 № 3, 243 – 246

3. Bodendiek R., Wagner K . Die Klasse der minimalen, nicht-projectiven. Graphen mit einer Kreuzhaube.J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973) 58 – 65.

4. Bodendiek R., Wagner K. Uber minimale, nicht projektive Graphen mit einer Kreuzhaube.Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 40 (1974) 215 – 225.

5. Bodendiek R., Wagner K.Uber die Querstiicke minimaler niht projektiver Graphen I.Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 40 (1974) 245 – 255.

6. Bodendiek R., Wagner K. Zum Basisproblem der nicht in die projective Ebene einbettbaaren Graphen II. J. Combin. Theory. 17 (1974) 249 – 265.

7. Bodendiek R., Schumacher H, Wagner K. Zur Minimalstruktur der nicht in die projective Ebene einbettbaren Graphen.J. Reine Angew. Math. 321 (1981) 99 – 112.

8. Bodendiek R., Schumacher H, Wagner K. Die Minimalbasis der Menge aller nicht in die projective Ebene einbettbaren Graphen. J. Reine Angew. Math. 327 (1981) 119 – 142.

9. Brown T. Duke R.A.An irreducible graph consisting a single block.J. Math. and Mech. 1966 15 № 1 129 – 135.

10. Duke R.A. Haggard G.The genus subgraphs K_8. Israel J. Math. 11 (1972) 452 – 455.

11. Glover H., Huneke J. P.There are finitely many Kuratovski graphe for projective plane. Graph theory and related topics. Academic Press N. У. 1979.

12. Glover H., Huneke J. P. 103 graphs which are irreducible for projective plane. J. Combin Theory Ser. B 27 (1979) № 3 332 – 370.

13. Glover H., Huneke J. P. Cubic irreducible graphs for projective plane. Discrete Math. 13 (1975) № 4, 341 – 355.

14. Haggard G. Expozition construction 103 irreducible graphs for projective plane.Ann. N. У. Acad. Sci 1979, 328 105 – 119.

15. Huneke J. P. A genus a graph. Relations betwen combinatorics and other parts mathematics.Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.

16. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen.Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.

17. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlosenen Flachen.Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.

18. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.

19. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.

20. Milgram M. Irreducible graphs.J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.

21. Milgram M.Irreducible graphs.J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.

22. Wagner K. Zum Basisproblem for Graphen mengen insbesondere for die niht in die progektive Ebene einbettbaren Graphen.J. Combin Theory 2 (1967) 168 - 185.

23. Wagner K.Zum Basisproblem der niht in die progektive Ebene einbettbaren Graphen. J. Combin Theory 9 (1970) 27 - 43.

24. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.

25. Петренюк В. І. О структуре плоских графів с заданним числом досяжности заданого множества точек. деп. в УкрНИИТИ N 814 19.08.1985

26. Петренюк В. І. Список 3-минимальних плоских графов. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 814 19.08.1985

27. Gagarin A.,William K. Embedding graphs containing K_5-subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33–50, 2002

28. Gagarin A., Myrvold W.,Chambers J.The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

29. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, March 2006.

30. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006

УДК 519.53 + 517.987

РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В.А. Романов

Доведена розкладність векторної міри в суму неперервної та цілком розривної міри.

It is proved decomposability of a vector measure into the sum of a continuous and a completely discontinuous measure.

1. Введение. В [1] доказана разложимость неотрицательной меры в сумму непрерывной и вполне Н-разрывной меры. В связи с развитием бесконечномерного анализа [2] возникла необходимость исследования векторных мер. Поэтому представляет интерес вопрос о возможности соответствующего обобщения упомянутого результата о разложении.

2. Постановка задачи. Пусть Х - сепарабельное пространство Фреше, У - банахово пространство. Под векторными мерами в Х понимаем счетно-аддитивные функции множества конечной полной вариации, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства Х и принимающие значения в пространстве У. В этой и следующей части статьи рассматриваем в пространстве векторных мер сходимость на системе измеримых множеств. Под сдвигом векторной меры Ф на вектор x пространства Х понимаем векторную меру Ф [x] , значение которой на каждом борелевском множестве В задается формулой

$$Ф [x] (B) = Ф (B + x) .$$

Определение 1. Векторная мера Ф называется *непрерывной по направлению x* , если для каждого борелевского множества В при стремлении коэффициента c к нулю имеет нулевой предел величина

$$(Ф [cx] - Ф) (B) .$$

Пусть Н - линейное подпространство (не обязательно замкнутое) пространства Х . Тогда Ф называется *Н-непрерывной* , если она непрерывна по всем направлениям из Н .

Определение 2. Векторная мера Ф называется *вполне Н-разрывной* , если не существует нетривиальной Н-непрерывной векторной меры, вариация которой мажорируется вариацией векторной меры Ф .

Цель статьи состоит в том, чтобы доказать разложимость векторной меры в сумму Н-непрерывной и вполне Н-разрывной меры.