УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ

Г. В. Завізіон, І.Г. Ключник

За допомогою матриці перетворення система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту асимптотично зводиться до інтегрованої системи рівнянь.

With help matrix of convert the system of differential equations with small parameter when part derivatives with a turning point asymptotic reduce to integral system of equations.

В [1 – 4] приводиться огляд літератури з основних методів побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту. В [5] вперше розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду.

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1$$
$$\varepsilon y_1' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \qquad (1)$$

де $y \in R^P, y_1 \in R^2, A(x), A_1(x), B_1(x), B_2(x) -$голоморфні при

$$|x| \le x_0 \qquad (2)$$

матриці, $B(x)$ матриця рівняння Ейрі [1] вигляду $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon -$малий дійсний параметр. В данній статті одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1), для якої $y \in R^P, y_1 \in R^m, m -$парне додатне число, а $B(x) - m \times m$ матриця рівняння з [6] вигляду

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Будемо вважати, що

$$trB_1(x) = trA(x) = 0. \qquad (4)$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \qquad (5)$$
$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \qquad (6)$$

де $\Phi(x,\varepsilon) -$блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} U(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}; \qquad (7)$$

матриці $C(\varepsilon), D(\varepsilon)$ мають формальні розвинення

$$C(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n, D(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_n, \qquad (8)$$

C_n, D_n – сталі матриці відповідно розмірностей $p\times m, m\times p,$ які мають вигляд

$$C_n=\begin{pmatrix} c_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{pn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, D_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{np} \end{pmatrix}$$

Згідно вигляду рівнянь (1), (5), (6) матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння (11) із [5], яке згідно (7) приводить до рівнянь (12) - (15) із [5]. Підставляючи в них розвинення (8) і зрівнюючи коефіцієнти при нульовій степені ε одержимо рівняння (16), (17) із [5]. З яких одержимо

$$U(x)=\Omega_0^x(A(x)), V(x)=q_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \qquad (9)$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ – матрицант першого з рівнянь (16) із [5], $q_{0i}(x), i=\overline{1,m}$ – довільні голоморфні функції в області (2), I – одинична матриця. Для визначення $q_{0i}(x), i=\overline{1,m}$ виконаємо рівняння (19) – (22) із [5], які одержують зрівнюючи в (12) – (15) із [5] коефіцієнти при першій степені параметра ε. А саме підставляючи (9) в рівняння (22) із [5] одержимо

$$q'_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}(q'_{0r}(x)B^{m-r}(x)+q_{0r}(x)(B^{m-r}(x))')+V_1(x)B(x)=$$

$$=B(x)V_1(x)+B_1(x)(q_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)B^{m-r}(x)). \qquad (10)$$

Згідно лем із [7] для існування розв'язку рівнянь (10) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$tr(V'(x)-B_1(x)V(x))=0,$$

$$tr((V'(x)-B_1(x)V(x))B^k(x))=0, k=\overline{1,m-1}. \qquad (11)$$

Враховуючи (10) співвідношення (11) приймуть вигляд

$$tr(q'_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q'_{0r}(x)B^{m-r}(x))=tr(B_1(x)(q_{0m}(x)I+$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x)) - tr(\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)(B^{m-r}(x))'),$$

$$tr((q'_{0m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q'_{0r}(x)B^{m-r}(x))B^{k}(x)) = tr(B_1(x)(q_{0m}(x)I +$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x))B^{k}(x)) - tr(\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)(B^{m-r}(x))'B^{k}(x)), k = \overline{1, m-1}.$$

(12)

Згідно [7] виконуються співвідношення

$$tr(B^{j}(x)) = \begin{cases} 0, & \text{ÿêùî} \quad 1 \le j \le m-1, \\ 0, & \text{ÿêùî} \quad j > m, \\ mx, & \text{ÿêùî} \quad j = m, \end{cases}$$

$$tr(B^{j}(x)B'(x)) = \begin{cases} 0, & \text{ÿêùî} \quad 1 \le j < m-1, \\ 0, & \text{ÿêùî} \quad j \ge m, \\ 1, & \text{ÿêùî} \quad j = m-1. \end{cases} \tag{13}$$

Враховуючи співвідношення (13) умови (12) запишемо у вигляді матричного рівняння вигляду

$$S(x)q'_0(x) = T(x)q_0(x), \tag{14}$$

де $T(x) = T_1 + T_2(x)$,

$$T_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, S(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & m \\ mx & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & mx & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & mx & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$q_0(x) = \begin{pmatrix} q_{01}(x) \\ \dots \\ q_{0m}(x) \end{pmatrix}$, і елементи матриці $T_2(x)$ визначаються наступним чином

$$\{T_2(x)\}_{kr} = \{tr(B_1(x)B^{m-1+k-r}(x))\}_{kr}, k = \overline{1,m}, r = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Помноживши рівняння (14) зліва на матрицю $B(x)$ маємо

$$xq'_0(x) = H(x)q_0(x), \tag{17}$$

де $H(x) = \dfrac{1}{m}B(x)T(x)$ і згідно (15) одержимо

$$\frac{1}{m}B(x)T_1 = -\begin{pmatrix} \frac{m-1}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m-2}{m} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

а також згідно (16) матриця $B(x)T_2(x)$ має при $x \to 0$ наступну поведінку

$$B(x)T_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & tr(B_1(0)B^{m-1}(0)) & \dots & tr(B_1(0)B^2(0)) & tr(B_1(0)B(0)) \\ 0 & 0 & \dots & tr(B_1(0)B^3(0)) & tr(B_1(0)B^2(0)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & tr(B_1(0)B^{m-1}(0)) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(x) \qquad (19)$$

Згідно (18), (19) матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i = -\frac{m-i}{m}, i = \overline{1,m}$, тому з теорії регулярних диференціальних рівнянь із [1] випливає, що система (17) має ненульові голоморфні в області (2) розв’язки, які залежать від значень $q_{0m}(0)$. Поклавши $q_{0m}(0) = 1$ однозначно визначається розв’язок $q_0(x)$ рівняння (17). Підставивши знайдену функцію $V(x)$ у вигляді (9) в залишившихся рівняннях (16), (17) із [5] одержимо рівняння (28), (29) із [5] для визначення $C_0, D_0, U_{11}(x), V_{11}(x)$. Помноживши (28) із [5] справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (29) із [5] зліва на $B^{m-1}(x)$ одержимо рівняння

$$U(x)C_0B^{m-1}(x) + xV_{11}(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \qquad (20)$$

$$B^{m-1}(x)V(x)D_0 = B^{m-1}(x)B_2(x)U(x) + xU_{11}(x). \qquad (21)$$

При $x = 0$ із (20), (21) одержимо рівняння для визначення матриць C_0, D_0:

$$U(0)C_0B^{m-1}(0) = A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \qquad (22)$$

$$B^{m-1}(0)V(0)D_0 = B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \qquad (23)$$

З рівнянь (22), (23) знайдемо:

$$\{C_0\}_{i1} = \{A_1(0)V(0)\}_{i1}, \{C_0\}_{ij} = 0,$$

$$\{D_0\}_{mi} = \{B_2(0)U(0)\}_{mi}, \{D_0\}_{si} = 0, i = \overline{1,p}, j = \overline{2,m}, s = \overline{1,m-1}. \qquad (24)$$

Враховуючи (22), (23) для визначення матриць $V_{11}(x), U_{11}(x)$ із

(20), (21) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x) = F(x), xU_{11}(x) = G(x), \tag{25}$$

де $F(x), G(x)$ – відомі матриці вигляду

$G(x) = B^{m-1}(x)V(x)D_0 - B^{m-1}(x)B_2(x)U(x),$

$F(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x) - U(x)C_0B^{m-1}(x).$ Оскільки, в силу вибору C_0, D_0 маємо $F(0) = 0, G(0) = 0$, то

$$F(x) = x\int_0^1 F'(tx)dt, G(x) = x\int_0^1 G'(tx)dt\,. \tag{26}$$

З врахуванням (25), (26) для $V_{11}(x), U_{11}(x)$ знайдемо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'(tx)dt, U_{11}(x) = x\int_0^1 G'(tx)dt\,,$$

які визначають голоморфні в області (2) розв’язки відповідно рівнянь (25). Отже знайдені коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовій степені.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (7), (8) при ε у першій степені ми маємо систему рівнянь (19) – (22) із [5]. Поклавши $U_1(0) = 0$ з рівняння (19) із [5] однозначно знаходимо $U_1(x)$ а загальний розв’язок рівняння (22) із [7] визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x)\,, \tag{27}$$

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1,m-1}(x) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(x) & \dots & g_{m,m-1}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно [7] умови існування розв’язку рівняння (46) із [5] наступні

$$trV_1'(x) = tr(B_1(x)V_1(x)) + trF_2(x), \tag{28}$$

$$tr(V_1'(x)B^k(x)) = tr(B_1(x)V_1(x)B^k(x)) + tr(F_2(x)B^k(x)), k = \overline{1, m-1}.$$

Підставляючи (27) в (28) одержимо наступну систему рівнянь для визначення $q_{1i}(x), i = \overline{1,m}$:

$$S(x)q_1'(x) = T(x)q_1(x) + f^{(1)}(x)\,, \tag{29}$$

де $S(x), T(x)$ визначаються за формулою (15), $q_1(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) \\ \dots \\ q_{1m}(x) \end{pmatrix}$, а компоненти вектора $f^{(1)}(x)$ визначаються за формулами

$$\{f^{(1)}(x)\}_1 = \{tr(B_1(x)W_1(x) + F_2(x) - W_1'(x))\}_1\,,$$

$$\{f^{(1)}(x)\}_i = \{tr(B_1(x)W_1(x) + F_2(x) - W_1'(x))B^{i-1}(x)\}_i\,, i = \overline{2,m}\,.$$

Помноживши (29) зліва на матрицю $B(x)$ маємо

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + F^{(1)}(x), \qquad (30)$$

де $F^{(1)}(x) = \frac{1}{m}B(x)f^{(1)}(x)$. Система рівнянь (30) має голоморфні розв'язки в області (2), які залежать від $q_{1m}(0)$. Поклавши $q_{1m}(0) = 0$ однозначно визначається розв'язок системи (30). Матриці $V_{21}(x), U_{21}(x), C_1, D_1$ однозначно знаходяться з рівнянь (52), (53) із [5]. Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень (7) є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при $\varepsilon = 0$ має вигляд $\Phi_0(x) = \Phi(x,0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x), V(x)$ визначаються за формулами (9). З умови (4) випливає, що $\det U(x) \equiv 1$. З явного вигляду (9) матриці $V(x)$ знайдемо, що похідна від визначника матриці $V(x)$ має вигляд

$$(\det V(x))' = \sum_{j=1}^{m} I_j, \qquad (31)$$

де $I_1 = \begin{vmatrix} q'_{0m}(x) & q'_{0,m-1}(x) & q'_{0,m-2}(x) & \dots & q'_{02}(x) & q'_{01}(x) \\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x) \\ xq_{02}(x) & xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{04}(x) & q_{03}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & xq_{0,m-4}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x) \\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x) \end{vmatrix}$,

$$I_j = \begin{vmatrix} q_{om}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{02}(x) & q_{01}(x) \\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq'_{0,j-1}(x) + q_{0,j-1}(x) & xq'_{0,j-2}(x) + q_{0,j-2}(x) & \dots & q'_{0,j+1}(x) & q'_{0j}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x) \\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x) \end{vmatrix},$$

(32)

$j = \overline{2,m}$ Враховуючи, що $tr(B_1(x)B^{m+i}(x)) = xtr(B_1(x)B^i(x)), i = \overline{0, m-2}$, покоординатний запис рівняння (14) запишемо у вигляді

$$mq'_{0m}(x) = \sum_{r=0}^{m-1} b_{m-r-1}(x)q_{0,r+1}(x),$$

$$mxq'_{0,j-1}(x)=\sum_{r=1}^{j-2}xb_{j-r-1}(x)q_{0r}(x)+\sum_{r=0}^{m-j}b_{m-r-1}(x)q_{o,j+r}(x)+$$
$$+xb_0(x)q_{0,j-1}(x)-(m-j+1)q_{0,j-1}(x),\ j=\overline{2,m},\tag{33}$$

де $b_0(x)=trB_1(x), b_i(x)=tr(B_1(x)B^i(x)), i=\overline{1,m-1}$.

Розглянемо випадок, коли $x\neq 0$. Зробимо перетворення у визначнику I_1: перший рядок визначника I_1 помножимо на mx і замінимо похідні $q'_{0m}(x)$ і $xq'_{0j}(x), j=\overline{1,m-1}$ скориставшись рівняннями (33). В одержаному визначнику $j-$тий рядок помножимо на $-b_{m+1-j}(x), j=\overline{2,m}$ і додамо до першого рядка, а потім записавши цей визначник у вигляді суми двох визначників одержимо

$$I_1=\frac{b_0(x)}{m}\det V(x)+\frac{1}{mx}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} 0 & -q_{0,m-1}(x) & \dots & -(m-2)q_{02}(x) & -(m-1)q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ xq_{02}(x) & xq_{01}(x) & \dots & q_{04}(x) & q_{03}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x)\end{vmatrix}\tag{34}$$

Далі зробимо перетворення у визначнику $I_j, j=\overline{2,m-1}$: $j-$тий рядок визначника помножимо на mx і скористаємося (33). В одержаному визначнику $i-$тий рядок при $i=\overline{1,j-1}$ помножимо на $-xb_{j-i}(x)$, а $i-$тий рядок при $i=\overline{j+1,m}$ помножимо на $-b_{j+m-i}(x)$ і додамо до $j-$того рядка, а потім записавши цей визначник у вигляді суми двох визначників одержимо

$$I_j=\frac{b_0(x)}{m}\det V(x)+\frac{1}{mx}\times\tag{35}$$
$$\times\begin{vmatrix} q_{om}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{02}(x) & q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (j-1)xq_{0,j-1}(x) & (j-2)xq_{0,j-2}(x) & \dots & (j+1-m)q_{0,j+1}(x) & (j-m)q_{0j}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x)\end{vmatrix},$$

$j=\overline{2,m-1}$. Зробимо перетворення у визначнику $I_m : m-$тий рядок множимо на m і скористаємося (33). В одержаному визначнику $j-$тий рядок помножимо на $-b_{m-j}(x), j=\overline{1,m-1}$ і додавши до $m-$го рядка одержимо

$$I_m=\frac{b_0(x)}{m}\det V(x)+ \quad (36)$$

$$+\frac{1}{m}\begin{vmatrix} q_{om}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{02}(x) & q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ (m-1)q_{0,m-1}(x) & (m-2)q_{0,m-2}(x) & \dots & q_{01}(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Покажемо, що сума других доданків в правій частині рівностей (34) – (36) дорівнює нулю, тобто виконується рівність:

$$\frac{1}{mx}\begin{vmatrix} 0 & -q_{0,m-1}(x) & \dots & -(m-2)q_{02}(x) & -(m-1)q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ xq_{02}(x) & xq_{01}(x) & \dots & q_{04}(x) & q_{03}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x) \end{vmatrix}+\dots$$

$$+\frac{1}{mx}\begin{vmatrix} q_{om}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{02}(x) & q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (j-1)xq_{0,j-1}(x) & (j-2)xq_{0,j-2}(x) & \dots & (j+1-m)q_{0,j+1}(x) & (j-m)q_{0j}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) & q_{0m}(x) \end{vmatrix}+\dots$$

$$+\frac{1}{m}\begin{vmatrix} q_{om}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & q_{02}(x) & q_{01}(x)\\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) & q_{02}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) & q_{0,m-1}(x)\\ (m-1)q_{0,m-1}(x) & (m-2)q_{0,m-2}(x) & \dots & q_{01}(x) & 0 \end{vmatrix}=0. \quad (37)$$

Для цього визначник, що є другим доданком в правій частині I_1 з формули (34) розкладемо по першому рядку, а визначник з правої частини $I_j, j=\overline{2,m}$, рівностей (35), (36) розкладемо по $j-$тому рядку. Одержаний вираз згрупуємо при $q_{01}(x), q_{02}(x)\dots q_{0,m-1}(x)$. При $q_{01}(x)$ одержимо вираз

$$\frac{q_{01}(x)}{mx}((m-1)\begin{vmatrix} xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) \\ xq_{02}(x) & xq_{01}(x) & \dots & q_{04}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) \\ xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} xq_{0,m-1}(x) & xq_{0,m-2}(x) & \dots & xq_{01}(x) \\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & q_{03}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq_{0,m-3}(x) & xq_{0,m-4}(x) & \dots & q_{0,m-1}(x) \\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & q_{0m}(x) \end{vmatrix} - \dots -$$

$$-\begin{vmatrix} q_{0,m}(x) & q_{0,m-1}(x) & \dots & xq_{01}(x) \\ xq_{01}(x) & q_{0m}(x) & \dots & xq_{02}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xq_{0,m-3}(x) & xq_{0,m-4}(x) & \dots & xq_{0,m-2}(x) \\ xq_{0,m-2}(x) & xq_{0,m-3}(x) & \dots & xq_{0,m-1}(x) \end{vmatrix}) \qquad (38)$$

Визначник, що є другим доданком в дужках формули (38) можна перетворити наступним чином: перший рядок переставити на місце $(m-1)-$го рядка, а рядки, що починаються з другого підняти на один рядок вище. При цьому враховуючи, що $m-$ парне, а кількість зроблених перестановок $m-2$, знак визначника не зміниться. Для перетворення $j-$того визначника до вигляду першого визначника будемо переставляти рядки і стовпчики таким чином, що елемент $xq_{01}(x)$ який знаходився в $j-$тому рядку перейде в перший рядок і перший стовпчик, при цьому всі інші рядки і стовпчики будемо здвигати таким чином, щоб не змінити порядок їх слідування у визначнику до перестановок. В $m-$тому визначнику $(m-1)-$ий стовпчик поставимо на місце першого, а всі інші стовпчики здвигаємо так, щоб не змінити їх порядок слідування у визначнику до перестановки. Після таких перетворень видно, що вираз, який знаходиться в формулі (38) дорівнює нулю. Міркуючи аналогічно одержимо, що сума визначників згрупованих при $q_{0j}(x), j=\overline{2,m-1}$ дорівнює нулю. Таким чином рівність (37) доведена.

Підставивши (34) – (36) в (31) і враховуючи (37) одержимо:

$$(\det V(x))' = (trB_1(x))\det V(x), x \neq 0 . \qquad (39)$$

Враховуючи

$$q_{0i}(0)=0, q_{0m}(0)=1, i=\overline{1,m-1} \qquad (40)$$

і формули (32) випливає, що I_j при $x=0$ є визначником верхньотрикутної матриці, в якої діагональний елемент (jj) дорівнює $q'_{0m}(0)$, а інші діагональні елементи дорівнюють оцінці. Тому

$$I_j(0)=q'_{0m}(0). \tag{41}$$

Підставляючи (40) в (33) при $x=0$ знайдемо

$$q'_{0m}(0)=\frac{trB_1(0)}{m}. \tag{42}$$

Тоді з (31), (41), (42) маємо

$$(\det V(x))'|_{x=0}=trB_1(0). \tag{43}$$

З (39) і (43) випливає, що для кожного x з області (2) справедлива рівність

$$(\det V(x))'=(trB_1(x))\det V(x). \tag{44}$$

З умови (4) і (44) випливає, що

$$(\det V(x))'\equiv 0, \tag{45}$$

для кожного x з області (2). Але тоді з (9), (45), маємо

$$\det V(x)\equiv \det V(0)=1.$$

Таким чином

$$\det\Phi_0(x)\equiv 1,$$

для кожного x з області (2).

Методом із [5] можна довести, що за допомогою заміни $u=V(\varepsilon)\omega$ система (5), (6) приводиться до вигляду

$$\omega_1'=c_1(\varepsilon)v_1, \omega_i'=0, i=\overline{2,p} \tag{46}$$

$$\varepsilon v'=B(x)v+\varepsilon D_1(\varepsilon)\omega, \tag{47}$$

де $v=(v_1,\dots v_m)-m$ вимірний вектор; $c_s(\varepsilon), s=\overline{1,p}-$елементи матриці $c_s=\{C(\varepsilon)\}_{s1}; V(\varepsilon)-p\times p$ матриця вигляду

$$V(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ j_2(\varepsilon) & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ j_p(\varepsilon) & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}, j_i(\varepsilon)=\frac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}, i=\overline{2,p},$$

при умові, що $c_1(\varepsilon)\neq 0; D_1(\varepsilon)=D(\varepsilon)V(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0\\ d_1(\varepsilon)\end{pmatrix}$. Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема. Нехай права частина системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2), такі, що $\det\Phi(x,0)\equiv 1$ і формальні перетворення з матрицею заміни вигляду (7) приводить систему (1), (2) до системи (46), (47).

Розглянемо систему рівнянь (46), (47). З (46) маємо

$$\omega_1 = \omega_1^0 + c_1(\varepsilon)\int_0^x v_1(t)dt, \omega_j = \omega_j^0, j = \overline{2,p}, \qquad (48)$$

де $\omega_i^0, i = \overline{1,p}-$ довільні сталі. Підставляючи (48) в (47) одержимо систему рівнянь для $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}$, яка приводиться до одного рівняння $m-$го порядку

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = v_1 x + \varepsilon c_0 + \varepsilon\alpha\int_0^x v_1(t)dt, \qquad (49)$$

де $c_0 = d_1(\varepsilon)\omega_0, d_1(\varepsilon) = (d_{11}(\varepsilon)\dots d_{1p}(\varepsilon)), \alpha = d_{11}(\varepsilon)c_1(\varepsilon); v_m = \varepsilon^{m-1}v_1^{(m-1)}$. Знайдемо частинний розв'язок рівняння (49), поклавши

$$v_1(0) = 0, v_1'(0) = 0, \dots v_1^{(m-1)}(0) = 0. \qquad (50)$$

Взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$v_1(x) = \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \qquad (51)$$

для коефіцієнтів цього ряда одержимо рівняння

$$\varepsilon^m m! v_m = \varepsilon c_0, v_m = \frac{c_0\lambda^{m-1}}{m!}, \lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (52)$$

$$\varepsilon^m n(n-1)\dots(n-m+1)v_n = v_{n-m-1}(1+\frac{\varepsilon\alpha}{n-m}), n = (m+1),(m+2)\dots \qquad (53)$$

З (53) маємо

$$v_n = \frac{v_{n-m-1}(1+\frac{\varepsilon\alpha}{n-m})}{\varepsilon^m n(n-1)\dots(n-m+1)}, n = (m+1),(m+2)\dots \qquad (54)$$

Врахувавши значення (50), (52) з (54) одержимо, що ненульові коефіцієнти ряду (51) визначаються співвідношеннями

$$v_{k(m+1)+m} = \frac{v_{k(m+1)-1}(1+\frac{\varepsilon\alpha}{k(m+1)})}{\varepsilon^m (km+k+m)(km+k+m-1)\dots(km+k+1)}, k = 1,2\dots \qquad (55)$$

З (55) маємо

$$v_{k(m+1)+m} = \frac{c_0\lambda^{mk+m-1}(m+1+\varepsilon\alpha)(2m+2+\varepsilon\alpha)\dots(km+k+\varepsilon\alpha)}{(km+k+m)!}, k = 1,2\dots$$

(56)

Згідно (51), (52), (55), (56) розв'язок (51) рівняння (49) має вигляд

$$v_1(x) = x^m\lambda^{m-1}c_0(\frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma_k(m+\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k+m)!}), \qquad (57)$$

де через $\Gamma_k(\mu)$ позначено добуток

$$\Gamma_k(\mu) = (\mu+1)(\mu+m+2)\ldots(\mu+km+k-m). \qquad (58)$$

Розглянемо тепер однорідне рівняння вигляду

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = v_1 x + \varepsilon\alpha \int_0^x v_1(t)dt. \qquad (59)$$

Знайдемо m лінійно незалежних розв'язків рівняння (59). Перше з них визначаємо у вигляді ряда

$$v_1(x) = 1 + \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \qquad (60)$$

тобто початкові умови визначимо наступним чином

$$v_1(0) = 1, v_1'(0) = 0, \ldots v_1^{(m-1)}(0) = 0. \qquad (61)$$

Підставляючи (60) в (59) для коефіцієнтів v_n ряда (60) одержимо рівняння

$$v_m = 0 \qquad (62)$$

і рекурентне співвідношення (53). З врахуванням (61), (62) ненульові коефіцієнти ряда (60) визначаються співвідношеннями

$$v_{k(m+1)} = \frac{v_{k(m+1)-m-1}\left(1 + \dfrac{\varepsilon\alpha}{k(m+1)-m}\right)\lambda^m}{(km+k)(km+k-1)\ldots(km+k-m+1)}, k = 1,2\ldots$$

Але тоді

$$v_{k(m+1)} = \frac{\lambda^{mk}(1+\varepsilon\alpha)(m+2+\varepsilon\alpha)\ldots(km+k-m+\varepsilon\alpha)}{(km+k)!}, k = 1,2\ldots \qquad (63)$$

Згідно (63) розв'язок (60) рівняння (59) має вигляд

$$v_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k(\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k)!}. \qquad (64)$$

$j-$тий лінійно незалежний розв'язок рівняння (59) визначимо у вигляді

$$v_1(x) = v_j x^j + \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, 1 \le j \le m-1 \qquad (65)$$

з початковими умовами

$$v_1(0) = 0, v_1'(0) = 0 \ldots v_1^{(j)}(0) = 1, v_1^{(j+1)}(0) = 0, \ldots v_1^{(m-1)}(0) = 0. \qquad (66)$$

Підставивши (65) в (59) для коефіцієнтів v_n ряда (65) одержимо рівняння (54). З врахуванням (66) одержимо, що ненульові коефіцієнти ряду (65) визначаються співвідношеннями

$$v_{k(m+1)+j} = \frac{v_{j+(m+1)(k-1)}\left(1 + \dfrac{\varepsilon\alpha}{j+km+k-m}\right)\lambda^m}{(km+k+j)(km+k+j-1)\ldots(km+k+j-m+1)}, k = 1,2\ldots$$

або

$$v_{k(m+1)+j} = \frac{\lambda^{mk}(j+1+\varepsilon\alpha)(m+2+j+\varepsilon\alpha)\ldots(km+k+j-m+\varepsilon\alpha)}{(km+k+j)!}. \quad (67)$$

Згідно (67) розв'язок (65) рівняння (59) має вигляд

$$v_1(x) = x^j\left(\frac{1}{j!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k(j+\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k+j)!}\right), 1 \le j \le m-1. \quad (68)$$

З розв'язків (57), (64) та (68) для $1 \le j \le m-1$ рівняння (49), (59) можна записати загальний розв'язок рівняння (48), а отже і загальний розв'язок системи рівнянь (46), (47) в загальному випадку.

Перспективним є дослідження існування і нескінченної диференційовності по дійсним змінним x,ε матричних функцій, які мають асимптотичне розвинення при $\varepsilon \to 0$ формальних рядів одержаних запропонованим в данній статті асимптотичним методом.

До рівняння (49) можна застосувати результати роботи [8] і дати більш повний аналіз розв'язків. Очевидним є узагальнення приведених вище результатів на випадок системи більш загального ніж в (1) вигляду, а саме на випадок системи

$$y' = A(x,\varepsilon)y + A_1(x,\varepsilon)y_1,$$
$$\varepsilon y_1' = B(x,\varepsilon)y_1 + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)y,$$

де A, A_1, B, B_1 – матриці голоморфні по x,ε в області $|x| \le x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0$ і такі, що матриця $B(x,0)$ голоморфно подібна матриця $B(x)$ вигялду (3).

Перспективним є дослідження системи (1) у випадку, коли матриця $B(x)$ має вигляд

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ x & xa_{n-1}(x) & xa_{n-2}(x) & \ldots & xa_2(x) & 0 \end{pmatrix}, a_i(x) \ne 0, i = \overline{2, n-1}.$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer-Verlag New York Ins., 1985. – 243 p.
3. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
5. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // УМЖ. – 2002. – 54, №11. – С. 1505 – 1516.
6. Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T. On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter. – Hiroshima Math. J. – 1979. – 9. – P. 747 – 767.

7. Wasow W. Simplification of turning point problems for systems of linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – 106. – P. 100 – 114.

8. Langer R.E. The solutions of the differential equations $v''' + \lambda^2 zv' + 3\mu\lambda^2 v = 0$ // Duke Math. J. – 1955. – 22. – P. 525 – 542.

УДК 373.5.016+514.371

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМНО-ДІЯЛЬНІСНОГО НАВЧАННЯ У ПРОЦЕСІ ІНТЕНСИВНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ОБДАРОВАНИХ УЧНІВ

Л.В.Ізюмченко, Р.Я.Ріжняк

В данной статье анализируется влияние на результативность математической подготовки одаренных учащихся модели учебного процесса, в которой используются элементы системно-деятельностного обучения.

The influence on effectiveness of mathematical training of gifted learners of the educational process model, in which the elements of systematic action teaching are used, is analysed in this article.

Зміни в житті суспільства приводять до зміни пріоритетів шкільної освіти, які проявляються у підвищенні уваги до розвитку особистості учня, його свідомості, культури мислення і творчих здібностей, і, що дуже важливо, до організації навчання способу пізнання, а не знань у чистому вигляді. Особливого значення ці пріоритети набувають у старшій школі, коли освіта націлена на забезпечення молодої особи умовами для професійного самовизначення з урахуванням її індивідуальних особливостей, можливостей і потреб. Тут навчання має здійснюватися на основі розширення і поглиблення знань і, головне, умінь та способів діяльності, надбаних раніше. Тобто значення набувають вже не конкретні знання, а вміння працювати з науковою, навчальною, наочною інформацією в цілому, будувати логічні ланцюжки, аналізувати наявну інформацію. Особливої актуальності орієнтація на навчання способів пізнання набуває у процесі інтенсивної математичної підготовки обдарованих учнів у системі МАН України [1], при організації занять з учасниками математичних олімпіад [2], з учнями заочних математичних шкіл при вищих навчальних закладах України [3]. Очевидно, що така підготовка передбачає проведення узагальнення і систематизації фактичного матеріалу, розкриття та засвоєння зв'язків і відношень між елементами матеріалу, побудову складної системи пізнання предмету вивчення [4].

Для успішного усвідомлення та практичного використання складних взаємозв’язків між компонентами змісту математичного матеріалу, що передбачений для вивчення та засвоєння вказаними категоріями учнів, останнім необхідно оволодіти тезаурусом різних фактів з теорії, а також мати