УДК 518.3 / 681.142.2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПО τ-МЕТОДУ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

П. Н. Денисенко

Аннотация

Побудовано алгебраїчний алгоритм для перетворення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь виду $A\cdot y^{(k)}+\cdots+C\cdot y = f(x,y,y'\ldots,y^{(k-1)})$, де $A,\ldots,C$ — многочлени, та проміжку $[a,b]$ на многочлен y_n порядку $n\in N$. Многочлен y_n — апроксимація розв'язку y задачі Коші оптимальна для дослідження функцій $y=y(x)$, $y'(x),\ldots,y^{(k)}(x)$, $x\in[a,b]$ в системах компьютерної алгебри.

We constructed the algebraic algorithm for transforming the initial-value problem for the ordinary differential equations of form $A\cdot y^{(k)}+\cdots+C\cdot y = f(x,y,y'\ldots,y^{(k-1)})$, where $A,\ldots,C$ — polynomials, and the interval $[a,b]$ into the polynomial y_n , $\deg(y_n)=n\in N$. This initial-value problem solution y approximation (y_n) is optimal for analyzing the functions $y=y(x)$, $y'(x),\ldots,y^{(k)}(x)$, $x\in[a,b]$ in the computer algebra systems.

Задача. Построить алгебраический алгоритм с таким входом и выходом.
Вход. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$D[y]=f\ ,\quad D[y]=A\cdot y^{(k)}+\cdots+C\cdot y\ ,\quad f=f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})\ ,\quad (1)$$

$$init\_cond(y,d)=\{\ y(d)=Y_0,\ y'(d)=Y_1,\ldots,y^{(k-1)}(d)=Y_{k-1}\ \}\qquad (2)$$

— $task$ — на отрезке $[a,b]$ и $d\in[a,b]$. Коэффициенты $A,\ldots,C$ (1) — алгебраические многочлены и $A(d)\neq 0$.
Выход. Алгебраический многочлен порядка $n\in N$, $n\geq m=m(D[y],f)$

$$y_n=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n=algorithm(\ task\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .\qquad (3)$$

Он аппроксимирует точное решение задачи Коши (1), (2) в пространстве

$$C^k_{[a,b]}\qquad y_m,\ldots,y_n,\ y_{n+1},\ldots\ \to\ y=y(x)=solve(\ task\ )$$

оптимально для исследования функций $y,y',\ldots,y^{(k)}$ на отрезке $[a,b]$ в системах компьютерной алгебры (СКА) — на задаче Коши (1), (2) в пространстве $X=C^k_{[a,b]}$ ограничен коэффициент оптимальности алгоритма

$$C_n(algorithm,\ task\ ,\ X)=\|y-y_n\|_X/\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_X.\quad (4)$$

Актуальность задачи. *Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений* является классическим аппаратом моделирования [1]. *Дифференциальные уравнения вида (1)* применяются в математических моделях более часто, чем дифференциальные уравнения других типов. В математических моделях, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями порядка k , часто, исследуют решение $y(x)$ уравнения и его производные $y'(x),\dots,y^{(k)}(x)$. *Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, APS и другие системы символьных вычислений на компьютерах — СКА* стали естественной средой математического моделирования.

СКА по алгебраическим алгоритмам вычисляют аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений в следующем виде:
— композиция специальных математических функций (существует редко),
— частная сумма ряда Тейлора решения задачи Коши — многочлен порядка n . Обычно $n<10$. Этот многочлен, как правило, не удовлетворяет основной критерий эффективности математических моделей — *точность*.

Возможности классического математического обеспечения ЭВМ. Программно реализованы, как правило, методы с насыщением. По этим программам вычисляет сеточную аппроксимацию решения задачи Коши. Производная сеточной функции, как правило, не оптимально аппроксимирует производную исходной функции.

1. Метод 1

1. Преобразовать условия (2) в начальное приближение к решению задачи

$$y_0=y_{n,0}=Y_0+Y_1\cdot(x-d)+\dots+Y_{k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\ . \qquad (5)$$

2. По методу простой итерации вычислить последовательность функций

$$\{\ y_s=solve(D[y]=f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})|_{y=y_{s-1}}\ ,\ init\_cond(y,d)\ )\ \}_{s=1}^{\infty}.$$

3. По алгоритму [2] τ-метода Ланцоша [1] вычислить аппроксимацию этой последовательности — последовательность алгебраических многочленов

$$y_{n,s}=algorithm\_[2](\ D[y]=F_s\ ,\ init\_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n)\ , \qquad (6)$$

$s=1,2,\dots$, порядка $n\in N$, где алгебраический многочлен

$$F_s=U_n[f_s]=U_n[\{\ f_s(x_i)\ \}_{i=0}^{n}] \qquad (7)$$

в узлах Чебышева $z_i=\cos(i\cdot\pi/n)$, $i=0,\dots,n$, на отрезке $[a,b]$ — $x_i=a+(b-a)\cdot(1-z_i)/2$, $i=0,\dots,n$ — интерполирует функцию

$$f_s=f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})|_{y=y_{n,s-1}}=f(x,y_{n,s-1},y'_{n,s-1},\dots,y_{n,s-1}^{(k-1)})\ . \qquad (8)$$

4. Вычислить искомую аппроксимацию (3) решения задачи Коши (1), (2) – предел последовательности многочленов (6) при $s\to\infty$

$$y_n=\lim_{s\to\infty}y_{n,s}\ . \qquad (9)$$

2. Алгоритм 1 — алгебраический алгоритм метода 1

1. Вычислить начальное приближение $y_{n,0}$ (5) к решению задачи Коши.
2. Для $s = 1,\ 2, \ldots$ вычислить:
   2.1. Производные $y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}$ многочлена $y_{n,s-1}$.
   2.2. Преобразование f_s (8) многочленов $y_{n,s-1},\ y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}$.
   2.3. Алгебраический многочлен F_s (7).
   2.4. Линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)
   $$D[y] = F_s \ . \tag{10}$$
   2.5. Алгебраический многочлен $y_{n,s}$ (6).
3. Вычислить алгебраический многочлен y_n (9).

Лемма 1. *Метод 1 эквивалентен алгоритму 1.*

Доказательство. Пункт 2 алгоритма 1, очевидно, является детализацией пункта 3 метода 1.

3. Оптимальность алгоритма 1

Модельная задача Коши — уравнение физического маятника

$$y'' = -\sin(y), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \ . \tag{11}$$

Эта задача имеет единственное решение — функцию

$$y(x) = solve(\ y'' = -\sin(y), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\ ) \approx sin(x)\ . \tag{12}$$

Свойства функции y (12). Отличные от нуля коэффициенты Фурье - Чебышева функции y (12) на отрезке $[-1, 1]$ только нечетные. Коэффициенты Фурье - Чебышева функций y и y'' на отрезке $[-1, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_{2\cdot i+1}(y'', [-1, 1])\}_{i=2}^{6} = \{-0.0042,\ 0.00029,\ -1.7 \cdot 10^{-5},\ 10^{-6},\ -5.7 \cdot 10^{-8}\}\ ,$$

$$\{a_{2\cdot i+1}(y, [-1, 1])\}_{i=2}^{6} = \{0.001,\ -0.00005,\ 2 \cdot 10^{-6},\ -8 \cdot 10^{-8},\ 3 \cdot 10^{-9}\}\ . \tag{13}$$

Функция y (12) — аналитическая в комплексной плоскости, не имеет особых точек на отрезке $[-1, 1]$ и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (13) регулярно убывают к нулю $|a_{2\cdot i+3}(y, [-1, 1])|/|a_{2\cdot i+1}(y, [-1, 1])| = \gamma_{1,2\cdot i+1} \approx 0.04$ (с ростом параметра $n = 2 \cdot i + 1$). Следовательно, *главной частью (с добавкой β_n , $|\beta_n| \le \beta \approx 0.04$) величины наилучшего приближения функции y (12) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[-1,1]}$ является $|a_{2\cdot[(n+1)/2]+1}(y, [-1, 1])|$ и справедливо тождество*

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[-1,1]}} = (1 + \beta_n) \cdot |a_{2\cdot[(n+1)/2]+1}(y, [-1, 1])|\ .$$

Для коэффициентов Фурье - Чебышева на отрезке $[-1,1]$ функций y (12) и y' , y'' справедливы неравенство $|a_{2\cdot i+1}(y,[-1,1])| \le |a_{2\cdot i}(y',[-1,1])| \le |a_{2\cdot i-1}(y'',[-1,1])|$ и тождество $|a_{2\cdot i+3}(y'',[-1,1])|/|a_{2\cdot i+1}(y'',[-1,1])| = \gamma_{2,2\cdot i+1}$ ≈ 0.06 , $i=1,2,\ldots$. Следовательно, *главной частью величины наилучшего приближения функции* y *(12) алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ (с добавкой γ_n , $|\gamma_n| \le \gamma \approx 0.07$) является $|a_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(y'',[-1,1])|$ и справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C^2_{[-1,1]}} = (1+\gamma_n)\cdot|a_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(y'',[-1,1])| \,. \quad (14)$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1 в пространстве $C_{[-1,1]}$. Норма погрешности решения задачи Коши (11) по алгоритму 1 в пространстве $C_{[-1,1]}$ принимает следующие значения $\{\ \|y-y_{2\cdot i+1}\|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{i=1}^{7}$ =

$$\{0.016,\ 0.0076,\ 3.5\cdot10^{-5},\ 1.6\cdot10^{-6},\ 7.8\cdot10^{-8},\ 3.6\cdot10^{-9},\ 1.8\cdot10^{-10}\}\,.$$

Из них и тождеств (14) и $y_n = y_{n-2\cdot\{(n-1)/2\}}$ можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. *Главной частью коэффициента оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (11) в пространстве* $C_{[-1,1]}$ *является* $C_n =$

$$\|y-y_n\|_{C_{[-1,1]}}/|a_{2\cdot[(n+1)/2]+1}(y,[-1,1])|, \quad \{C_{2\cdot i+1}\ \}_{i=1}^{5} = \{16,\ 15,\ 17,\ 20,\ 27\}\,.$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1 в пространстве $C^2_{[-1,1]}$. Норма погрешности решения задачи Коши (11) по алгоритму 1 в пространстве $C^2_{[-1,1]}$ принимает следующие значения $\{\ \|y-y_{2\cdot i+1}\|_{C^2_{[-1,1]}}\ \}_{i=1}^{8}$ =

$$\{0.067,\ 0.0047,\ 0.0003,\ 1.8\cdot10^{-5},\ 1.1\cdot10^{-6},\ 5.8\cdot10^{-8},\ 3.3\cdot10^{-9},\ 1.8\cdot10^{-10}\}\,.$$

Поэтому из тождества (14) можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. *Главной частью коэффициента оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (11) в пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *является*

$$\|y-y_n\|_{C^2_{[-1,1]}}/|a_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(y'',[-1,1])| = 1+\alpha_n = 1+\alpha_{2\cdot[(n-1)/2]+1}\ , \quad (15)$$

$$\{\alpha_{2\cdot i+1}\ \}_{i=1}^{5} = \{0.2\ ,\ 0.12\ ,\ 0.07\ ,\ 0.05\ ,\ 0.04\ ,\ 0.02\}\,. \quad (16)$$

Согласно определения, коэффициент оптимальности метода вычисления алгебраического многочлена, аппроксимирующего решение задачи Коши (1), (2), не меньше единицы. Поэтому из тождеств (15) и (14) можно сделать следующее заключение.

Вывод 3. *Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (11) в пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *асимптотически тождественен (с* *добавкой* δ_n , $|\delta_n| \leq 0.07$ *) минимальному значению коэффициента оптимальности — единице и справедливо тождество*

$$C_n(algorithm\_1,\ task\ (11),\ C^2_{[-1,1]}) = (1+\delta_n)\cdot(1+\alpha_{2\cdot[(n-1)/2]+1})\ . \qquad (17)$$

4. Алгоритм 1 и метод ряда Тейлора

Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора. Отличны от нуля только нечетные коэффициенты Тейлора в точке ноль функций y (12) и y'' . Они принимают следующие значения

$$t_{2\cdot i+1}(y'') = t_{2\cdot i+3}(y)\cdot(2\cdot i+3)\cdot(2\cdot i+2)\ , \quad \{t_{2\cdot i+1}(y)\}_{i=0}^{8} = \{1,\ -0.1(6),$$

$$0.01(6),\ -0.0026,\ 0.0004,\ -7.7\cdot10^{-5},\ 10^{-5},\ -2.6\cdot10^{-6},\ 4.6\cdot10^{-7}\}\ .$$

С ростом параметра $n = 2\cdot i+1$ эти коэффициенты регулярно убывают к нулю и удовлетворяют тождества

$$t_n(y'')/a_n(y'',[-1,1]) \approx 2^n\ , \quad |t_{n+2}(y)|/|t_n(y)| = \gamma_{5,n}\ ,$$

$$\{\gamma_{5,2\cdot i+1}\}_{i=0}^{7} = \{0.1(6),\ 0.1,\ 0.16,\ 0.17,\ 0.19,\ 0.18,\ 0.17\}\ . \qquad (18)$$

Знаки коэффициентов Тейлора функций y (12) и y'' чередуются. Следовательно, норма погрешности аппроксимации функции y (12) частной суммой ее ряда Тейлора — $T_n[y]$ — в пространстве $C^2_{[-1,1]}$, с ростом параметра n монотонно убывает к нулю и удовлетворяет тождества

$$\|y-T_n[y]\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|y''-T_{2\cdot[(n-1)/2]-1}[y'']\|_{C_{[-1,1]}} = A_{2\cdot[(n-1)/2]+1}\cdot|t_{2\cdot[(n-1)/2]-1}(y)|\ ,$$

$$\{A_{2\cdot i+1}\}_{i=1}^{7} = \{0.7,\ 0.63,\ 0.6,\ 0.53,\ 0.45,\ 0.44,\ 0.42\}\ , \qquad \{\|y-T_{2\cdot i+1}[y]\|_{C^2_{[-1,1]}} =$$

$$\|y''-T_{2\cdot i-1}[y'']\|_{C_{[-1,1]}}\}_{i=1}^{7} = \{0.23,\ 0.068,\ 0.019,\ 0.0045,\ 0.001,\ 0.00024,\ 5\cdot10^{-5}\}\ .$$

Поэтому из тождеств (14), (18) можно сделать следующее заключение.

Вывод 4. *На задаче Коши (11) в пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *:*

— *главная часть коэффициента оптимальности метода ряда Тейлора в* $Q = O(2^n)$ *раз больше главной части (15) коэффициента оптимальности алгоритма 1 и справедливо тождество*

$$\|y-T_n[y]\|_{C^2_{[-1,1]}}/|a_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(y'',[-1,1])| = (1+\gamma_{2\cdot[(n-1)/2+1]})\cdot 2^{2\cdot[(n-1)/2]}\ ,$$

$$\{\gamma_{2\cdot i+1}\ \}_{i=1}^{5}\ =\ \{-0.009\ ,\ 0.01\ ,\ 0.02\ ,\ 0.03\ ,\ 0.03\}\ ,$$

— *для коэффициента оптимальности метода ряда Тейлора справедливо тождество*

$$C_n(Taylor,\ task\ (11),\ C^2_{[-1,1]}) = (1+\delta_n)\cdot(1+\gamma_{2\cdot[(n-1)/2]+1})\cdot 2^{2\cdot[(n-1)/2]}\ ,$$

где $\qquad |\delta_n| \leq 0.07\ , \qquad |\gamma_{2\cdot i+1}| \leq 0.03\ .$

5. Метод 2 — вариант метода Галеркина

1. Вычислить интегральное уравнение

$$D[V^k[u] + y_{n,0}] = f(V^k[u] + y_{n,0}, V^{k-1}[u] + y'_{n,0}, \dots, u)] \ , \qquad (19)$$

где $y_{n,0}$ — многочлен (5) (удовлетворяет условия (2)), $V[u] = \int_d^x u(t)\,dt$.

2. Вычислить аппроксимацию уравнения (19) по методу Галёркина

$$S_p[D[V^k[u_p] + y_{n,0}]] = S_p[U_n[f(V^k[u_p] + y_{n,0}, V^{k-1}[u_p] + y'_{n,0}, \dots, u_p)]], \quad (20)$$

где $u_p \in H_p[a,b]$, параметр $p = n - k$, оператор проектирования $S_p : L_2(a,b;\rho) \to H_p[a,b]$ (вычисляет частную сумму ряда Фурье - Чебышева порядка p функции на отрезке $[a,b]$) с возмущением алгебраическим интерполированием $U_n[f]$ (7) по узлам Чебышева на отрезке $[a,b]$.

3. Решить уравнение (20) по методу простой итерации:

— вычислить начальное приближение — многочлен $u_{p,0} = y_{n,0}^{(k)} = 0$,

— вычислить следующие приближения — алгебраические многочлены

$$u_{p,s} = solve(S_p[D[V^k[u_p] + y_{n,0}] - F_s] = 0 \quad (u_p \in H_p[a,b]) \ ) \ , \qquad (21)$$

где $s = 1, 2, \dots$, $F_s = U_n[f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y_{n,s-1}^{(k-1)})]$ (7),

$$y_{n,s-1} = V^k[u_{p,s-1}] + y_{n,0} \ , \qquad (22)$$

— вычислить решение уравнения (20) — алгебраический многочлен

$$u_p = \lim_{s\to\infty} u_{p,s} \ . \qquad (23)$$

4. Вычислить искомый многочлен

$$y_n = V^k[u_p] + y_{n,0} \ . \qquad (24)$$

Алгоритм 2. Алгоритм 1 с следующей модификацией п. 2.5.

2.5. Вычислить:

— преобразование ЛДУМК (10) подстановкой $y = V^k[u] + y_{n,0}$

$$D[V^k[u] + y_{n,0}] - F_s = 0 \ , \qquad (25)$$

— решение уравнения (25) по методу Галеркина с оператором проектирования уравненя (20) $S_p : L_2(a,b;\rho) \to H_p[a,b]$, $p = n - k$,

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[D[V^k[u] + y_{n,0}] - F_s]] = 0 \quad (u_p \in H_p[a,b]) \ ) \ , \qquad (26)$$

— многочлен $y_{n,s-1} = V^k[u_{p,s-1}] + y_{n,0}$ (22).

Лемма 3. *Метод 2 эквивалентен алгоритму 2.*

Доказательство. Уравнение (21) является аппроксимацией по методу Галеркина с оператором проектирования $S_p : L_2(a,b;\rho) \to H_p[a,b]$ линейного уравнения (25). Оператор проектирования уравнений (21) и (26) тождественны. Следовательно, решения этих уравнений — многочлены $u_{p,s}$ (21) и (26) — тождественны, тождественны их преобразования (22) и для пределов последовательностей этих многочленов u_p (23) и y_n (9) справедливо тождество (24).

Лемма 4. *Пусть параметр n алгоритмов 1 и 2 не меньше $2 \cdot k$. Тогда алгоритм 1 эквивалентен алгоритму 2.*

Доказательство. Если $n \geq 2 \cdot k$, то, согласно теореме 1 [2] и инвариантности алгоритма [2] относительно сдвига, многочлен $y_{n,s}$ (6) тождественен многочлену $y_{n,s}$ (26). Остальные преобразования алгоритмов 1 и 2 тождественны.

Теорема 1. *Пусть параметр алгоритма 1 и метода 2 $n \geq 2 \cdot k$. Тогда алгоритм 1 эквивалентен методу 2.*

Доказательство. Это утверждение следует из лемм 3 и 4.

6. Сходимость алгоритма 1

Из теоремы 1 и оценок оптимальности операторов S_n и U_n как аппарата аппроксимации функций на отрезке $[a,b]$ [39] (с. 77 – 95)

$$\|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b,\rho)} = \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{L_2(a,b,\rho)} \ ,$$

$$\|S_n\|_{L_2(a,b,\rho)} = 1 \ , \quad \|S_n\|_{C_{[a,b]}} = (4/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \ , \ O(1) \leq 3 \ , \ n > 0 \ ,$$

$$\|U_n\|_{C_{[a,b]}} = (2/\pi) \cdot \ln(n) + O(1) \ , \quad O(1) \leq 1 \ , \quad n > 0$$

можно сделать следующее заключение.

Вывод 5. *Результаты исследования метода Галеркина [3] (глава 4) на задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1), (2) достаточно широкого класса (с единственным решением $y = solve(\ task\ (1),\ (2)\ )$) доказывают:*

- *многочлен y_n (3) существует для $n \geq m$, $m = m(\ D[y],\ f\ )$,*
- *в пространстве $L_2(a,b,\rho)$ $\quad y_m^{(k)}, \dots, y_n^{(k)},\ y_{n+1}^{(k)}, \dots \ \to\ y^{(k)}$,*
- *коэффициент оптимальности алгоритма 1 по точности аппроксимации функции $y^{(k)}$ в пространстве $L_2(a,b,\rho)$ ограничен .*

7. Апостериорные оценки погрешности алгоритма 1

Теоретические оценки. Для алгоритма [2] доказаны точные и конструктивные апостериорные оценки нормы в пространстве $C^k_{[a,b]}$ погрешности решения задачи Коши для ЛДУМК (10), (2), $s = 1, 2, \dots$. Если последовательность этих оценок сходится, то ее предел естественно принять за оценку погрешности алгоритма 1 на задаче Коши (1), (2).

Пример 1. Для решения задачи Коши (11) по алгоритму 1 мы преобразовали эту задачу в тождественную задачу

$$y'' + y = y - \sin(y), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\ . \tag{27}$$

Задача Коши для ЛДУМК (10), (2) для этой задачи имеет вид

$$y'' + y = y_{n,s-1} - \sin(y_{n,s-1}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\ . \tag{28}$$

ЛИУМК (25) для задачи Коши (28) имеет вид

$$u + V^2[u] + x = y_{n,s-1} - U_n[sin(y_{n,s-1})]\ , \quad V[u] = \int_0^x u(t)\,dt\ . \tag{29}$$

Оценка [2] нормы в пространстве $C^2_{[-1,1]}$ погрешности решения по алгоритму [2] с параметром n задачи Коши (28) на отрезке $[-1,1]$ имеет вид

$$\|y - y_n\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|W_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}} \cdot |\tau(n,s)|\ , \quad s = 1,2,\ldots\ , \tag{30}$$

где $|\tau(n,s)| = |\tau(2\cdot[(n-1)/2]+1, s)|$ — отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена решения этой задачи по алгоритму [2],

$$\{\|W_{2\cdot i+1}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}}\}_{i=1}^{6} = \{\ 1.28,\ 1.17,\ 1.12,\ 1.09,\ 1.08,\ 1.04\ \}\ . \tag{31}$$

Если $s > 2$, то элементы последовательности $\tau(n,s)$, $s = 1,2,\ldots$ — практически не изменяются. В случае $n = 11$ эти элементы принимают следующие значения

$$\{\tau(11,i)\}_{i=1}^{\infty} = \{1.4\cdot10^{-10},\ 8.4\cdot10^{-7},\ 1.01\cdot10^{-6},\ldots,\ 1.00848\cdot10^{-6},\ldots\}.$$

Эти последовательности имеют пределы $\{\ \tau(3),\ \tau(5),\ldots\ \tau(19)\} = \{\ 0.056,$

$0.0041,\ 0.00028,\ 1.7\cdot10^{-5},\ 1\cdot10^{-6},\ 5.7\cdot10^{-8},\ 3.2\cdot10^{-9},\ 1.7\cdot10^{-10},\ 9.5\cdot10^{-12}\ \}$.

Поэтому из тождества (15) можно сделать следующее заключение.

Вывод 6. *Предел апостериорной оценки погрешности алгоритма [2] на задаче Коши для ЛДУМК (10), (2) при $s \to \infty$ является конструктивной оценкой погрешности алгоритма 1 на задаче Коши (1), (2). На задачах Коши (11) и (27) эта оценка имеет вид (30) и практически тождественна погрешности решения этих задач Коши по алгоритму 1.*

8. Априорные оценки погрешности алгоритма 1

Теоретические оценки. Для алгоритма [2] доказаны точные и конструктивные априорные оценки нормы в пространстве $C^k_{[a,b]}$ погрешности решения задачи Коши для ЛДУМК (10), (2), $s = 1,2,\ldots$ и коэффициента оптимальности алгоритма (4). Этот коэффициент зависит только от оператора $D[y]$. Если линейная часть функции f уравнения (1) мала, то коэффициент оптимальности решения задачи Коши для ЛДУМК (10), (2) по алгоритму [2] достаточно точно аппроксимирует коэффициент оптимальности решения задачи Коши (1), (2) по алгоритму 1.

Пример 2. Оценка главной части коэффициента оптимальности в пространстве $C^2_{[-1,1]}$ решения по алгоритму [2] задачи Коши для ЛДУМК (28) на отрезке $[-1,1]$ имеет вид $\|y'' - y''_n\|_{C_{[-1,1]}} / |a_{2\cdot i+1}(y'', [-1,1])| =$

$$\|W''_{2\cdot i+1}(x)\|_{C_{[-1,1]}} / a_{2\cdot i+1}(W''_{2\cdot i+1}(x), [-1,1]) \ , \tag{32}$$

где $i = [(n-1)/2]$, $\|W_{2\cdot i+1}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|W''_{2\cdot i+1}(x)\|_{C_{[-1,1]}}$.
Мы вычислили составляющие правой части оценки (32) — (31) и

$$\{a_{2\cdot i+1}(W''_{2\cdot i+1}(x), [-1,1])\}_{i=1}^{6} = \{1.05,\ 1.02,\ 1.01,\ 1.006,\ 1.004,\ 1.003\} \ . \tag{33}$$

Из тождеств (15), (31), (32), (33) можно сделать следующее заключение.

Вывод 7. *Априорная оценка [2] погрешности и коэффициента оптимальности алгоритма [2] на задаче Коши для ЛДУМК (10), (2) является конструктивной оценкой погрешности и коэффициента оптимальности алгоритма 1 на задаче Коши (1), (2). На задаче Коши (27) эта оценка имеет вид (32) и практически тождественна главной части (15) коэффициента оптимальности алгоритма 1 на задачах Коши (11) и (27).*

9. Вычисление оценки погрешности алгоритма 1

Методы. Мы построили для алгоритма [2] методы вычисления:
— оценки нормы погрешности в пространстве $X = C_{[a,b]}$, $C^k_{[a,b]} \ldots$,
— оценки коэффициента оптимальности в пространстве $C^k_{[a,b]}$.

Эти методы достаточно эффективны на задаче Коши для ЛДУМК (10), (2). Следовательно, они достаточно эффективны на задаче Коши (1), (2).

Пример 3. (Иллюстрация эффективности методов.) Для задачи Коши (28) по этим методам с параметром q вычисляют многочлены

$$W''_{n,q}(x) \approx W''_n(x) \ , \quad \|W''_{n,q}(x) - W''_n(x)\|_{C_{[-1,1]}} < 2 \cdot |\tau(n,q)|$$

и один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n,q)$. Этот коэффициент убывает к нулю (с ростом параметра q методов) $|\tau(n,q)| = o(u^{q-n})$, $u < 0.1$. Поведение коэффициента $\tau(n,q)$ в общем случае хорошо иллюстрируют его частные значения

$$\{\tau(2\cdot j+1, 25) = \tau(2\cdot j+1, 26) \ , \ j = 0, \ldots, 13\} =$$

$$\{-1\cdot 10^{-36},\ 4\cdot 10^{-35},\ -3\cdot 10^{-33},\ 5\cdot 10^{-31},\ -1\cdot 10^{-28},\ 6\cdot 10^{-26},$$
$$-4\cdot 10^{-23},\ 3\cdot 10^{-20},\ -3\cdot 10^{-17},\ 4\cdot 10^{-14},\ -7\cdot 10^{-11},\ 10^{-7},\ -3\cdot 10^{-4},\ 1\} \ .$$

Из этих тождеств можно сделать следующее заключение.

Вывод 8. *По построенным методам с параметром q для задачи Коши (27), отрезка $[-1,1]$ и параметра n вычисляют:*

— аппроксимацию оценки (30) погрешности алгоритма 1

$$\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+1,q}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}} \cdot |\tau(n,s)| \ , \quad s=1,2,\dots \ , \qquad (34)$$

и погрешность этой аппроксимации не больше

$$|\ \|W_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}} - \|W_{2\cdot[(n-1)/2]+1,q}(x)\|_{C^2_{[-1,1]}}\ | \cdot |\tau(n,s)| <$$

$$2\cdot|\tau(n,s)|\cdot|\tau(2\cdot[(n-1)/2]+3,q)| = o(u^{q-2\cdot[(n-1)/2]-3}) = o(u^q) \ , \quad u<0.1 \ ,$$

— аппроксимацию оценки (32) коэффициента оптимальности алгоритма

$$\|W''_{2\cdot[(n-1)/2]+1,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}}/a_{2\cdot[(n-1)/2]+1}(W''_{2\cdot[(n-1)/2]+1,q}(x),[-1,1])$$

и погрешность этой аппроксимации, с ростом q, убывает как

$$O(|\tau(2\cdot[(n-1)/2]+3,q)|) = o(u^{q-2\cdot[(n-1)/2]-3}) = o(u^q) \ , \quad u<0.1 \ .$$

Заключение.

Алгоритм 1 на задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1), (2) реализует идею К. Ланцоша [1].

На основании τ-метода построить эффективные методы вычисления аппроксимации y_n решения отдельных видов функциональных уравнений.

Дополнение

1. **Алгоритм 1'.** Модификация алгоритма 1. Алгоритм [2] заменен τ-методом с базисом пространства Гильберта $H_{[a,b]}$.
2. Для алгоритма 1' имеют место аналог теоремы 1 и аналоги применения оценок погрешностей и коэффициента оптимальности алгоритма [2]. В этих аналогах пространство $L_2(a,b;\rho)$ заменено на $H_{[a,b]}$.
3. Для погрешности алгоритма 1 в комплексной плоскости справедливы тождества — предел тождеств оценок погрешностей алгоритма [2].
4. Для погрешности алгоритма 1' в комплексной плоскости справедливы тождества — предел аналогов тождеств для погрешностей алгоритма [2].
5. Мы реализовали алгоритм 1 в виде процедуры на языке APLAN и доказали полиномиальную сложность по параметру n итерации процедуры.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ланцош К. (Lanczos C.) *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.
2. Денисенко П. Н. *Реализация τ-метода Ланцоша в APS.* // Искусственный интеллект. — 2005. — N 1. — С. 48 — 58.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.