БІБЛІОГРАФІЯ

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Планім.: Підруч. для 7 – 9 кл. заг. освітн. навч. закл. – К.: Школяр, 2004.
3. Бохонов Ю.Є., Борисенко С.Д., Буценко Ю.П. Зразки білетів вступних та атестаційних випробувань з математики. (Серія «На допомогу абітурієнту»). – К.: НТУУ «КПІ», 2001.
4. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом Н.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.

УДК 532.59

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НОРМАЛЬНОЇ І АНОМАЛЬНОЇ ДИСПЕРСІЇ ХВИЛЬОВОГО ПАКЕТУ

Ю.В. Гуртовий

Подано основні відомості про дисперсію хвильових пакетів та їх групову швидкість. Наведено спосіб математичного моделювання і візуалізації явища дисперсії для різних фізичних середовищ.

Basic information is given about dispersion of wavepackets and their group velosity. The method of mathematical modeling and visualization of the dispersion is described for different physical environments.

Вступ. Зв'язок між частотою ω і хвильовим числом k для гармонійної хвилі визначається фізичними властивостями середовища. Цей зв'язок заданий в явному або неявному вигляді D(ω,k)=0 називається дисперсійним співвідношенням або дисперсійним рівнянням.

У простому випадку залежність частоти ω від хвильового числа k лінійна: $\omega = ck$, де — фазова швидкість, що не залежить від частоти хвилі (мал. 1.2 а). Таке середовище (або хвиля) називається недисперсійним. В цьому випадку будь-яке збурення, що описується довільною функцією, поширюється без зміни форми.

Якщо ж зв'язок між ω і k нелінійний (рис. 1.б), то фазова швидкість залежить від частоти (або хвильового числа), і різні спектральні складові хвилі поширюються з різними швидкостями. В цьому випадку говорять про дисперсійні середовища і дисперсію хвиль. Необхідно відразу ж відмітити, що дисперсійне співвідношення $D(\omega,k)= 0$ може мати декілька коренів, тоді говорять про декілька «гілок» дисперсійних кривих (див. рис. 1. 6), що відповідають різним хвильовим модам. У ізотропному середовищі такі гілки з'являються симетричними парами, які відповідають хвилям, що біжать в протилежних напрямках.

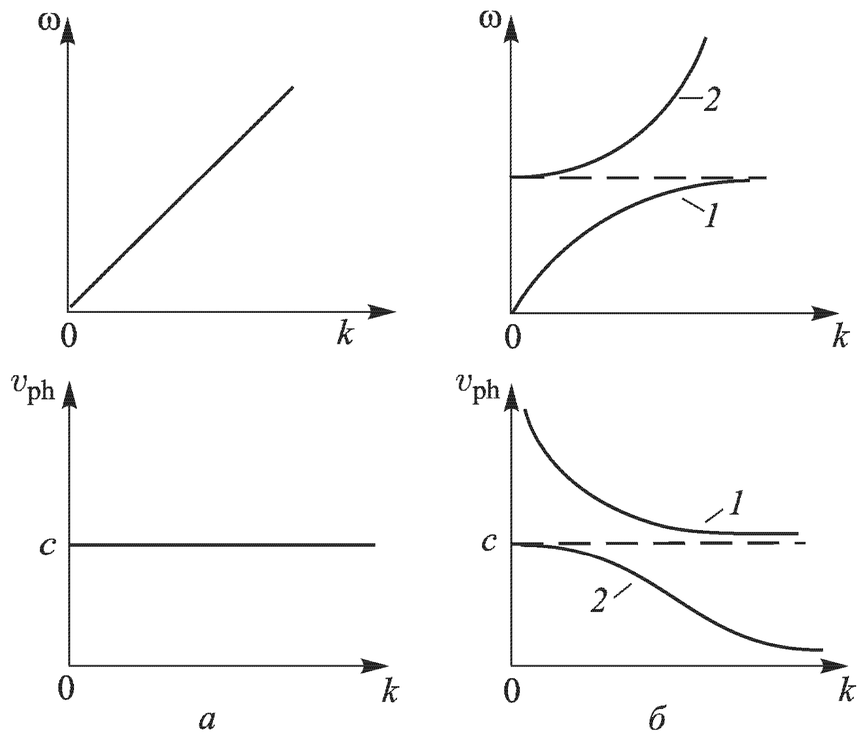

Рис. 1. Залежність частоти і фазової швидкості гармонійної хвилі від хвильового числа в середовищі без дисперсії (а) і в середовищі з дисперсією (б); 1 — низькочастотна мода, 2 — високочастотна мода

Причина дисперсії хвиль пов'язана з існуванням в середовищі характерних просторових або часових масштабів. Інколи розрізняють часову дисперсію, викликану наявністю в середовищі власних масштабів часу (наприклад, частота власних коливань молекул, характерний час релаксації і тому подібне), і просторову дисперсію, пов'язану з наявністю просторових масштабів (наприклад, період кристалічної решітки, характерні розміри хвильоводу тощо). При математичному описі хвильових процесів це приводить до нелокальної залежності між фізичними змінними (наприклад, між поляризацією і напруженістю електричного поля в діелектриці або між напругою і деформацією в твердому тілі), які записуються у вигляді диференціальних і интегродиференціальних рівнянь. У загальному випадку (наприклад, для хвиль в рухомих середовищах) поділ дисперсії на просторову і тимчасову не завжди можливий

Модульована хвиля і групова швидкість. Гармонійна хвиля однорідна у просторі та часі. Вона є корисною математичною ідеалізацією, але в природі її не існує. Реальний процес, строго кажучи, ніколи не зводиться до однієї синусоїди, хоч би тому, що джерело збудження (генератор) працює обмежений час і в хвилі є «початок» і «кінець». Передача сигналів за допомогою гармонійної хвилі також неможлива із-за її однорідності у просторі та часі. Щоб передати сигнал за допомогою хвилі, потрібно її промодулювати, тобто змінити якийсь її параметр в часі. Якщо при цьому хвиля залишається близькою до гармонійної, то такими змінними параметрами можуть бути її амплітуда, частота або фаза. Відповідно розрізняють амплітудну, частотну і фазову модуляції. В результаті виходить не гармонійна хвиля, а, наприклад, локалізоване збурення (хвильовий пакет), який можна розглядати як набір гармонійних хвиль з амплітудами і фазами, залежними від частоти. Іншими словами модульована хвиля може бути представлена інтегралом Фур'є.

Розглянемо процес, що складається з двох гармонійних хвиль з близькими частотами ω_1 і ω_2 однаковими амплітудами (рис. 2. а):

$$u(x,t) = u_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) + u_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) =$$
$$= 2u_0\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t - \frac{k_2-k_1}{2}x\right)\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1+k_2)x\right]$$

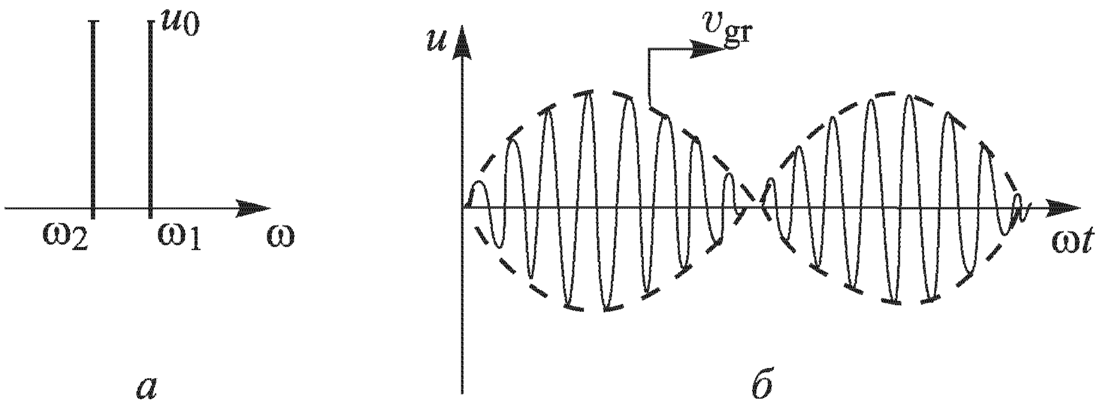

Рис. 2. Спектр (а) і форма (б) бігармонічної хвилі

Звідси видно, що такий хвильовий процес можна описати добутком двох періодичних функцій, одна з яких $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$, де $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, $k_0 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$, описує швидко осцилюючу (несучу) хвилю, а інша описує повільні зміни амплітуди несучої хвилі — амплітудну обвідну (рис. 2 а, б).

$$a(x,t) = 2u_0\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t - \frac{k_2-k_1}{2}x\right)$$

Модульована хвиля є «биттям», причому в точках, де амплітуда проходить через нуль, фаза зазнає стрибок на величину рівну π. Несуча хвиля, переміщається з фазовою швидкістю $\upsilon_{ph} = \omega_0/k_0$, а обвідна групи хвиль $a(x,t)$ переміщається із швидкістю

$$\upsilon_{gr} = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Таким чином ми бачимо, що для характеристики модульованої хвилі необхідно ввести ще одне поняття — швидкість обвідної, яку називають груповою швидкістю. У загальному випадку групова швидкість модульованої хвилі визначається виразом

$$\upsilon_{gr} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

При такому визначенні групової швидкості відношення скінченних різниць замінюється на похідну. Важливо відзначити, що групова швидкість може сильно відрізнятися від фазових швидкостей всіх гармонійних хвиль, які входять до складу спектру модульованої хвилі, не дивлячись на те, що у сигналі з вузьким спектром всі складові мають близькі фазові швидкості. Між груповою і фазовою швидкостями існує проста залежність:

$$\upsilon_{gr} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk}$$

що називається формулою Релея. Звідси видно, що групова і фазова швидкості збігаються, якщо υ_{ph} не залежить від хвильового числа, тобто дисперсії відсутня. За наявності дисперсії групова швидкість може бути як більше, так і менше фазової швидкості, залежно від знаку похідної $d\upsilon_{ph}/dk$. Дисперсію називають нормальною, якщо $\upsilon_{gr} < \upsilon_{ph}\,(d\upsilon_{ph}/dk < 0)$, і аномальною, якщо $\upsilon_{gr} > \upsilon_{ph}\,(d\upsilon_{ph}/dk > 0)$.

Аномальна дисперсія зустрічається, наприклад, в діелектриках на частотах електромагнітних хвиль, близьких до резонансних ліній поглинання, в капілярних хвилях на поверхні рідини. Існує простий графічний спосіб визначення групової і фазової швидкостей по дисперсійній кривій (рис. 3). Величина і знак фазової швидкості визначаються тангенсом кута нахилу січної, проведеною з початку координат: $\upsilon_{ph} = \operatorname{tg}\alpha$, а групова швидкість дорівнює тангенсу кута дотичної: $\upsilon_{gr} = \operatorname{tg}\beta$

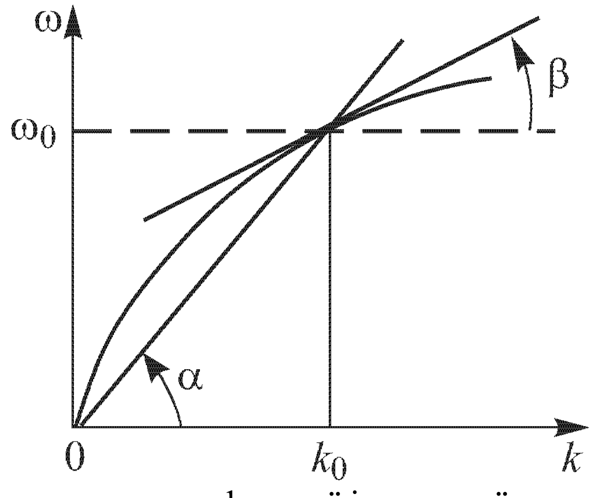

Рис. 3. Графічне визначення фазової і групової швидкостей хвилі по дисперсійній кривій

Моделювання явища дисперсії. Поняття про дисперсію і групову швидкість є досить абстрактними, і складними для розуміння, тому що за математичними формулами не видно їх фізичної суті і яскравого наочного образу. Тому постає необхідність математичного моделювання і візуалізації цих важливих фізичних понять для кращого засвоєння в першу чергу студентами. Отже розглянемо поняття хвильового пакету як суперпозиції ста гармонійних хвиль, дискретний спектр яких зображений на рис.4, і задається законом

$$a(k) = 0{,}07\,\mathrm{e}^{-(0{,}1k-3)^2}$$

Сам хвильовий пакет можливо представити у вигляді суми гармонічних хвиль, у яких амплітуда змінюється по вище вказаному закону.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{100} 0{,}07\,\mathrm{e}^{-(0{,}1k-3)^2}\cos(0{,}1kx - \omega(k)t)$$

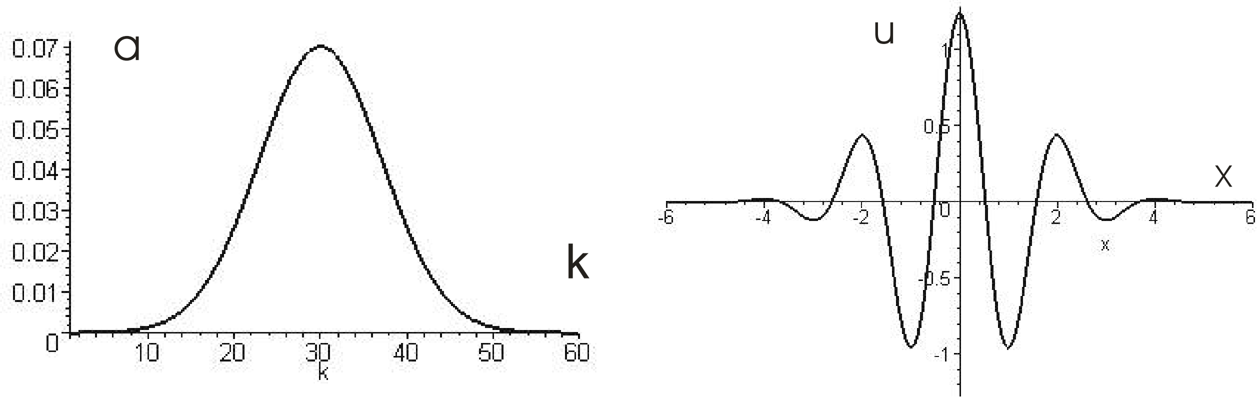

Рис. 4. Хвильовий пакет та його спектр

Використовуючи подане вище математичне описання можна розглядати поведінку хвильового пакету для різних законів дисперсії ω(к). Якщо частота залежить лінійно від хвильового числа, то хвиля буде бездисперсійною і хвильовий пакет буде розповсюджуватись без зміни форми. Якщо, наприклад, закон дисперсії задається формулою $\omega = \sqrt{gk}$, що має місце для коротких гравітаційних хвиль на поверхні рідини, то тут яскраво можна спостерігати нормальну дисперсію (рис. 5). В процесі руху видно, що хвильовий пакет ніби розмазується по простору, а його максимальна амплітуда зменшується. Саме тому дане явище отримало назву дисперсії.

Побудовані анімаційні математичні моделі в середовищі Maple дозволяють спостерігати рух хвильового пакету в різних дисперсійних середовищах. Що особливо цікаво, візуально можна оцінити, коли фазова швидкість більша чи менша за групову. Наприклад, коли $\omega = \sqrt{\sigma k^3/\rho}$, що описує дисперсію капілярних хвиль на поверхні рідини, то чітко можна спостерігати, що групова швидкість більша за фазову (явище аномальної дисперсії). Більш повну інформацію про різні закони дисперсії можна отримати в роботах [1–2].

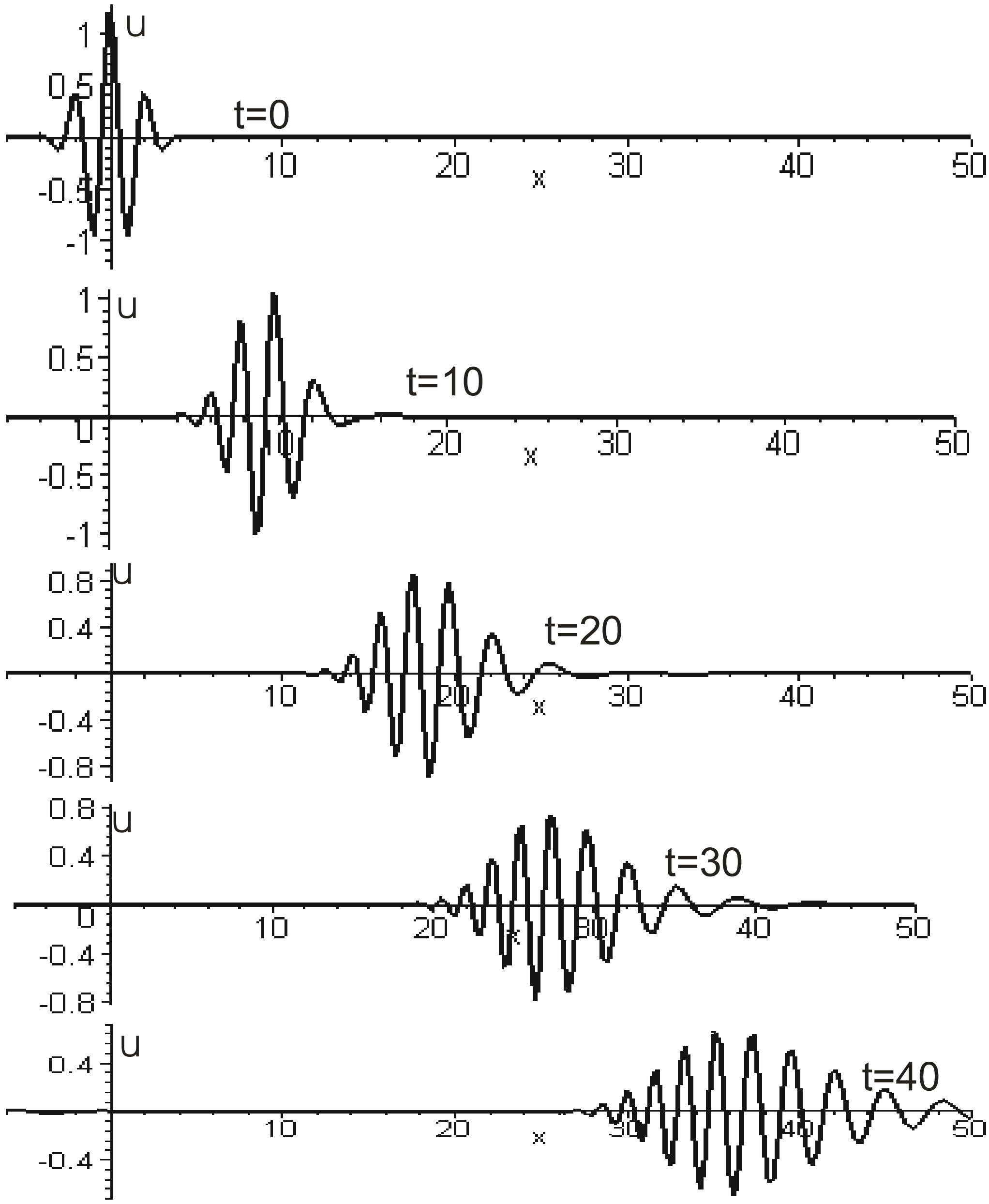

Рис. 5 Дисперсія хвильового пакету для коротких хвиль на поверхні рідини

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Рабинович М.И. Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 564 с.

2. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. - М.: Ф-М, 2003. - 400 с.