УДК 37.016

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ДОВЕДЕННЯ І ЗАСТОСУВАННЯ У ШКІЛЬНІЙ МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

О.М.Вороний

A possibility of studying triangle inequality by means of school mathematics and its application to the proof of inequalities, solving algebraic and geometric extremum problems, extracting the roots of equations and solutions to sets of equations is considered.

Розглянуто можливість вивчення нерівності трикутника засобами шкільної математики та її застосування для доведення нерівностей, розв'язування алгебраїчних і геометричних задач на екстремуми, відшукання коренів рівнянь і розв'язків систем рівнянь.

Співвідношення

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\,, \tag{1}$$

де $a_1,...,a_n;b_1,...,b_n$ – довільні дійсні числа, називається нерівністю трикутника. У цьому співвідошенні знак рівності має місце тоді й тільки тоді, коли $a_1:b_1=...=a_n:b_n=\lambda^2$. Нерівність трикутника є однією з базових нерівностей математики, має важливе значення і широке застосування. (Детальніше про нерівність трикутника див. [1]).

Ознайомити учнів загальноосвітніх навчальних закладів з нерівністю трикутника можна розв'язуючи наступну задачу.

Довести, що для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ має місце нерівність

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|. \tag{2}$$

Ця задача є в різних шкільних підручниках з геометрії. Зокрема, в підручнику [2] вона поміщена в розділі «Вектори на площині» за №14. Її розв'язання досить просте, тому на ньому зупинятися не будемо. Зазначимо, що в цій нестрогій нерівності знак рівності має місце у випадках, коли один з векторів є нульовим вектором, або коли вектори мають однаковий напрямок. Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_1,a_2),\vec{b}(b_1,b_2)$, то, враховуючи означення модуля вектора, нерівність в алгебраїчній формі записується так:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\,. \tag{3}$$

Оскільки умовою співнапрвлeності векторів є рівність відношень їх відповідних координат $a_1:b_1=a_2:b_2=\lambda^2$, то за цієї умови нестрога нерівність (2) перетворюється в рівність. Якщо $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, то отримуємо нерівність трикутника для $n=3$:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\,. \tag{4}$$

Зазначимо, що в шкільній математичній освіті нерівності (1) – (4) можна використовувати для доведення складніших нерівностей, для розв'язування алгебраїчних і геометричних задач на екстремуми, для відшукання коренів рівнянь і розв'язків систем рівнянь. Такі задачі пропонують учням на різних математичних змаганнях, абітурієнтам – на вступних випробуваннях, а вчителям – на сторінках періодичних фахових видань.

Розглянемо деякі з них. При розв'язанні задач використовуватимо як алгебраїчну, так і векторну форму нерівності трикутника.

Задача 1. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

(*XXIX Донецька обласна олімпіада юних математиків, 1989 р., 8 кл.*).

Розв'язання. Введемо вектори $\vec{a}(-x;y-1)$, $\vec{b}(x-1;-y)$. Тоді

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-x)^2+(y-1)^2},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(x-1)^2+(-y)^2}.$$

Оскільки $x^2=(-x)^2, y^2=(-y)^2$, то використовуючи нерівність (2), отримаємо:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\left(\overline{-x+x-1;\,y-1-y}\right)\right|=\sqrt{2}.$$

Рівність досягається, коли $\vec{a}=\vec{0}$, тобто $x=0$, а $y=1$. Тому найменше значення виразу дорівнює $\sqrt{2}$. Зауважимо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вводити не обов'язково. Можна безпосередньо скористатися нерівністю (3):

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(-x)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(-y)^2}\geq$$

$$\geq\sqrt{(-x+x-1)^2+(y-1-y)^2}=\sqrt{2}$$

і визначити з умови $\dfrac{-x}{x-1}=\dfrac{y-1}{-y}>0$ ті значення x і y, за яких нестрога нерівність перетворюється у рівність: $x=a, y=1-a$ для довільного $a\in(0;1)$.

Задача 2. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$.

(*Кіровоградська обласна олімпіада юних математиків, 1994 р., 11-й кл.*).

Розв'язання. Позначимо вираз літерою $S(x)$ і запишемо його так:

$$\mathrm{S}(x)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

За нерівністю (3) маємо $\mathrm{S}(x)\geq\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$. З рівності $\left(x-\dfrac{1}{2}\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{1}{2}$ знаходимо $x=\sqrt{3}-1$ і переконуємося, що $S(\sqrt{3}-1)=\sqrt{2}$. Отже, $\sqrt{2}$ – найменше значення виразу.

Задача 3. Нехай $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-6x+9}+$ $+\sqrt{2x^2-10x+13}$. Довести, що $f(x)\geq 4\sqrt{5}$ для всіх $x\in\mathbf{R}$. (*Румунський молодіжн. журн. «Gazeta matematika». Передрук.: Матем. в шк. №4, 1982*).

Доведення. Виконаємо тотожні перетворення виразу, що задає функцію, виділивши квадрати двочленів у кожному підкореневому виразі і належним чином згрупувавши доданки функції:

$$f(x)=\sqrt{2}\ \Big[\Big(\sqrt{(x+0{,}5)^2+0{,}5^2}+\sqrt{(-x+2{,}5)^2+0{,}5^2}\Big)+$$
$$+\sqrt{(x-0{,}5)^2+1{,}5^2}+\sqrt{(-x+1{,}5)^2+1{,}5^2}\Big)\Big]$$

Застосуємо до кожної суми коренів нерівність трикутника:

$$f(x)\geq\sqrt{2}\left(\sqrt{3^2+1^2}+\sqrt{1^2+3^2}\right)=4\sqrt{5}.$$

Нерівність доведено. Доведемо, що $4\sqrt{5}$ – найменше значення функції. Для цього складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x+0{,}5}{-x+2{,}5}=\dfrac{0{,}5}{0{,}5},\\[2mm] \dfrac{x-0{,}5}{-x+1{,}5}=\dfrac{1{,}5}{1{,}5},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=1.$$

Оскільки кожне з рівнянь системи є умовою перетворення нерівності трикутника у рівність, то функція набуває своє найменше значення тоді, коли $x=1$, при цьому $f(1)=4\sqrt{5}.$

Задача 4. При яких значеннях *x* та *y* вираз

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}-\sqrt{x^2+y^2-8x-10y+41}\qquad(5)$$

набуває найбільшого значення. Знайти ці значення. (*Математична олімпіада Національного університету ім. Т. Шевченка, 2001 р.*).

Розв'язання. Скористаємося нерівністю (3), яку запишемо так:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\leq\sqrt{b_1^2+b_2^2}\ .\qquad(6)$$

У ній знак рівності буде тоді, коли $a_1:b_1=a_2:b_2=\lambda^2>0$, або коли $a_1=a_2=0$.

Перетворимо підкореневі вирази різниці (5), і застосуємо нерівність (6):

$$\sqrt{((x-4)+3)^2+((y-5)+4)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}\leq\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

При цьому різниця дорівнюватиме 5, якщо $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{4}\geq 0$. Звідси

$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ і $x\geq 4$. *Відповідь*: 5, *якщо* $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$, *де* $x\geq 4$.

Задача 5. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x, y, z виконується нерівність $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{y^2+yz+z^2}$. (*МАН. Контрольна робота з математики III етапу конкурсу-захисту. Секція обчислювальної техніки та програмування, 11-й кл., 2001 р.*).

Доведення. Спочатку під коренями лівої частини нерівності виділимо суму квадратів двочленів, а потім застосуємо нерівність трикутника:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} =$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(-x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2}=\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Задача 6. Довести, що для всіх дійсних a, b, c виконується нерівність

$$\sqrt{(a+b-1)^2+2c^2}+\sqrt{(a+c-1)^2+2b^2}+\sqrt{(b+c-1)^2+2a^2} \geq \sqrt{3}.$$

(*Фестиваль юних математиків і фізиків, Одеса, 1994 р.*).

Розв'язання. Для доведення нерівності спочатку перетворимо ліву частину даної нерівності, а потім використаємо нерівність (4):

$$\sqrt{(a+b-1)^2+2c^2}+\sqrt{(a+c-1)^2+2b^2}+\sqrt{(b+c-1)^2+2a^2} =$$

$$=\sqrt{(1-a-b)^2+c^2+c^2}+\sqrt{b^2+(1-a-c)^2+b^2}+\sqrt{a^2+a^2+(1-b-c)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}.$$

Задача 7. Нехай a і b – дійсні додатні числа. Знайти всі значення x, для яких виконується рівність

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}-ax+a^2}+\sqrt{\frac{x^2}{3}-bx+b^2}=\sqrt{a^2-ab+b^2}. \qquad (7)$$

(*XLIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків. IV етап, 9-й кл., 2003 р.*).

Розв'язання. Виділимо квадрати двочленів у підкореневих виразах лівої частини рівності:

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}-ax+a^2}+\sqrt{\frac{x^2}{3}-bx+b^2} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Утворимо вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$: $\vec{u}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2}\right),\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{x}{\sqrt{3}},\frac{b}{2}\right)$ і знайдемо їхню суму: $\vec{u}+\vec{v}=\left(\overrightarrow{\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}\right)$. Оскільки $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\frac{x^2}{3}-bx+b^2}$, $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\frac{x^2}{3}-ax+a^2}$, а $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{a^2-ab+b^2}$, то рівність (7) запишемо так: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$. Водночас для векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$ виконується нестрога нерівність $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$, яка перетворюється у рівність за умови:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right):\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\frac{a}{2}:\frac{b}{2}\Leftrightarrow\frac{2x-3a}{3b-2x}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ x=\frac{3ab}{a+b}.$$

Таким чином, застосування нерівності (2) дало можливість розв’язування ірраціонального рівняння звести до розв’язування дробово-лінійного рівняння.

Задача 8. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4 \tag{8}$$

на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. (*Математика в школе, РФ, 1981, №5, задача 2417*).

Розв’язання. Нескладно переконатися, що числа 0 і $\frac{\pi}{2}$ не є розв’язками рівняння, тому вважатимемо, що $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Виконаємо перетворення:

$$15-12\cos x=3\left((2-\cos x)^2+\sin^2 x\right);$$

$$7-4\sqrt{3}\sin x=(2-\sqrt{3}\sin x)^2+(\sqrt{3}\cos x)^2.$$

Враховуючи отримані рівності, рівняння запишемо так:

$$\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x)^2+(\sqrt{3}\sin x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}\cos x)^2+(2-\sqrt{3}\sin x)^2}=4.$$

Застосуємо до лівої частини рівняння нерівність (3):

$$\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x)^2+(\sqrt{3}\sin x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}\cos x)^2+(2-\sqrt{3}\sin x)^2}\ge$$

$$\ge\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\cos x)^2+(\sqrt{3}\sin x+2-\sqrt{3}\sin x)^2}=4.$$

Приходимо до висновку, що в нерівності трикутника повинна виконуватися рівність. Це можливо тільки за умови, що:

$$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\cos x}=\frac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=1. \tag{9}$$

Таким чином, за допомогою нерівності (3) розв'язання трансцендентного рівняння (8) зведено до розв'язування тригонометричного рівняння (9). Єдиним розв'язком останнього рівняння на проміжку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ є число $\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=5,\\ 3xy-6x=10.\end{cases}$$

(*Кіровоградська обл. олімп. юних математ., 2004 – 2005 н.р., 10-й кл.*)

Розв'язання. Утворимо вектори $\overline{a}=(\overline{x-2;\,y-2})$, $\overline{b}=(\overline{6-x;\,5-y})$ і знайдемо їх суму: $\overline{a}+\overline{b}=(\overline{4;\,3})$. Тоді з першого рівняння системи маємо:

$$5=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|\le\left|\overline{a+b}\right|=5.$$

Тому повинна виконуватися рівність $\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|=\left|\overline{a+b}\right|$, яка можлива тільки за умови, що один з векторів є нуль-вектором або вектори мають однаковий напрямок. Пари чисел $(2;2)$ і $(6;5)$, за яких $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – нуль-вектори, є розв'язками першого рівняння системи, але не задовольняють друге. Умовою співнапрямленості векторів є рівність відношень відповідних координат: $(x-2):(6-x)=(y-2):(5-y)$. До того ж ці відношення повинні бути додатними. Тому $2<x<6,\ 2<y<5$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}(x-2):(6-x)=(y-2):(5-y),\\ 3xy-6x=10,\end{cases}$$

і, враховуючи встановлені обмеження, знаходимо розв'язок системи: $\dfrac{10}{3}, 3$.

Задача 10. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{2},\\ y=x+a\end{cases}$$

має розв'язки? Знайти ці розв'язки. ([*3*]*, с. 29*).

Розв'язання. Виділимо квадрати двочленів у підкореневих виразах лівої частини першого рівняння системи і застосуємо нерівність трикутника:

$$\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}\ge$$

$$\ge\sqrt{(1-x+x)^2+(y+1-y)^2}=\sqrt{2}.$$

З умови перетворення нерівності трикутника в рівність маємо:

$$\frac{1-x}{x}=\frac{y}{1-y}>0.$$

Тому приходимо до системи рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ y=x+a, \end{cases}$ компоненти x і y розв'язків якої повинні належати проміжку $(0;\,1)$. Розв'язуючи отриману систему, маємо $x=\dfrac{1-a}{2}$, $y=\dfrac{1+a}{2}$, де $|a|<1$. Пари чисел $(1;0)$ і $(0;1)$ є розв'язками першого рівняння системи і задовольнятимуть друге, якщо $a=-1$ і $a=1$ відповідно. *Відповідь*: $x=\dfrac{1-a}{2}$, $y=\dfrac{1+a}{2}$, *де* $|a|\le 1$.

Задача 11. Дано дві точки A і B, що лежать по різні боки від прямої l. Розташувати на цій прямій відрізок MN, даної довжини, так щоб ламана $AMNB$ мала найменшу довжину.

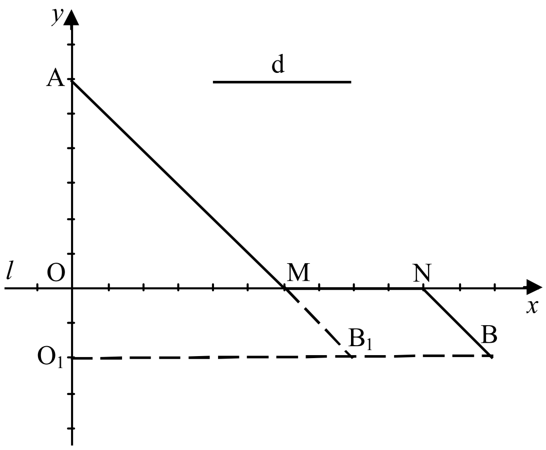
Розв'язання. Побудуємо прямокутну декартову систему координат xOy так, щоб вісь абсцис співпадала з прямою l, а одна з даних точок, наприклад A, лежала на осі ординат (мал. 1). Нехай d – довжина відрізка MN, а точки A, B, M, N мають координати: $A(0,a), B(b,-c), M(x,0), N(x+d,0)$, де a,b,c,d,x – додатні числа. Знайдемо довжину $L(x)$ ламаної $AMNB$:

$$L(x)=\sqrt{x^2+a^2}+d+\sqrt{(b-x-d)^2+c^2}.$$

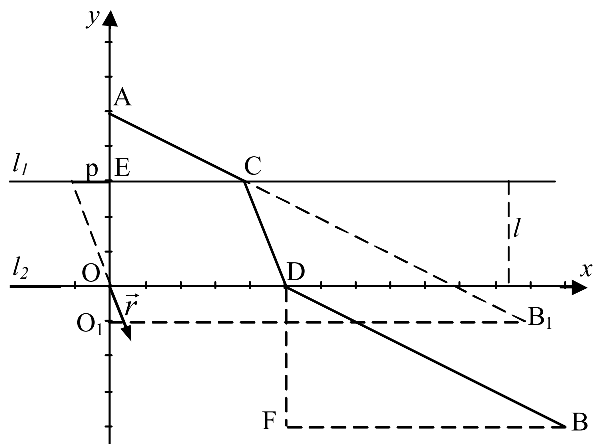
Оскільки $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x-d)^2+c^2}\ge\sqrt{(b-d)^2+(a+c)^2}$, то

$L(x)\ge d+\sqrt{(b-d)^2+(a+c)^2}$, а $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} L(x)=d+\sqrt{(b-d)^2+(a+c)^2}$, якщо

$$\frac{x}{b-x-d}=\frac{a}{c}\;\Leftrightarrow\; x=\frac{a(b-d)}{a+c}\;\Leftrightarrow\;\frac{x}{a}=\frac{b-d}{a+c}.$$



Мал. 1



Мал. 2

Таким чином, розв'язання задачі зведено до побудови відрізка x, пропорційного трьом відомим. Для його побудови досить провести пряму AB_1, де $B_1(b-d,-c)$ Точка перетину цієї прямої з віссю абсцис буде шуканою точкою M, бо $OM=x$. Після цього будуємо точку $N(x+d,0)$. Ламана $AMNB$ – шукана.

Задача 12. Дано дві паралельні прямі l_1 і l_2 та дві точки A і B, що лежать по різні боки смуги, яку обмежують ці прямі. На прямих l_1 і l_2 побудувати відповідно точки C і D так, щоб відрізок CD мав заданий напрямок і щоб довжина ламаної $ACDB$ була найменшою.

Розв'язання. Побудуємо прямокутну декартову систему координат xOy так, щоб вісь абсцис співпадала з прямою l_2, а одна з даних точок лежала на осі ординат (мал. 2). Нехай напрямок відрізка CD задає вектор $\vec{r}(u,v), l$ – відстань між прямими, а дані й шукані точки мають координати: $A(0,a), B(b,-e), C(c,l), D(x,0)$. Зауважимо, що числа a,b,c,e,l,x – додатні. Якщо L довжина ламаної $ACDB$, то $L=AC+CD+DB$. Зрозуміло, що довжина ланки CD ламаної є постійною величиною і дорівнює $\left(l\sqrt{u^2+v^2}\right):v$. Знайдемо суму $S(x)$ довжин ланок AC і CD ламаної і застосуємо нерівність трикутника:

$S(x)=\sqrt{c^2+(a-l)^2}+\sqrt{(b-x)^2+e^2}\geq\sqrt{(c+b-x)^2+(a-l+e)^2}$. Різниця $x-c$ є довжиною p проекції відрізка CD на вісь абсцис і є постійною: $x-c=p=\dfrac{ul}{v}$. Тому $\sqrt{(b-p)^2+(a-l+e)^2}$ є найменшим значенням суми $S(x)$ і досягається воно тоді, коли $\dfrac{c}{b-x}=\dfrac{a-l}{e}\Leftrightarrow\dfrac{c}{a-l}=\dfrac{b-x}{e}$. Далі знаходимо $x=\dfrac{(a-l)b+ep}{a+e-l}$ і $c=\dfrac{(a-l)(b-p)}{a+e-l}$. Побудуємо прямокутні трикутники AEC і DFB, де $E(0,l), F(x,-e)$. Вони подібні, бо $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{c}{a-l}=\dfrac{b-x}{e}=\dfrac{BF}{DF}$, а їхні гіпотенузи AC і DB – паралельні.

Таким чином, розв'язання задачі зведено до двох побудов. 1) побудови відрізка c такого, що $c:(a-l)=(b-p):(a+e-l)$; для цього достатньо провести пряму AB_1, де $B_1(b-p,a+e-l)$, точка її перетину з прямою l_1 буде точкою C. 2) побудови прямої, що проходить через точку B, паралельно прямій AC, точка перетину цієї прямої з прямою l_2 буде точкою D.

Нескладно довести, що ламана $ACDB$ має найменшу довжину.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Планім.: Підруч. для 7 – 9 кл. заг. освітн. навч. закл. – К.: Школяр, 2004.
3. Бохонов Ю.Є., Борисенко С.Д., Буценко Ю.П. Зразки білетів вступних та атестаційних випробувань з математики. (Серія «На допомогу абітурієнту»). – К.: НТУУ «КПІ», 2001.
4. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом Н.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.

УДК 532.59

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НОРМАЛЬНОЇ І АНОМАЛЬНОЇ ДИСПЕРСІЇ ХВИЛЬОВОГО ПАКЕТУ

Ю.В. Гуртовий

Подано основні відомості про дисперсію хвильових пакетів та їх групову швидкість. Наведено спосіб математичного моделювання і візуалізації явища дисперсії для різних фізичних середовищ.

Basic information is given about dispersion of wavepackets and their group velosity. The method of mathematical modeling and visualization of the dispersion is described for different physical environments.

Вступ. Зв'язок між частотою ω і хвильовим числом k для гармонійної хвилі визначається фізичними властивостями середовища. Цей зв'язок заданий в явному або неявному вигляді D(ω,k)=0 називається дисперсійним співвідношенням або дисперсійним рівнянням.

У простому випадку залежність частоти ω від хвильового числа k лінійна: $\omega = ck$, де — фазова швидкість, що не залежить від частоти хвилі (мал. 1.2 а). Таке середовище (або хвиля) називається недисперсійним. В цьому випадку будь-яке збурення, що описується довільною функцією, поширюється без зміни форми.

Якщо ж зв'язок між ω і k нелінійний (рис. 1.б), то фазова швидкість залежить від частоти (або хвильового числа), і різні спектральні складові хвилі поширюються з різними швидкостями. В цьому випадку говорять про дисперсійні середовища і дисперсію хвиль. Необхідно відразу ж відмітити, що дисперсійне співвідношення $D(\omega,k)= 0$ може мати декілька коренів, тоді говорять про декілька «гілок» дисперсійних кривих (див. рис. 1. 6), що відповідають різним хвильовим модам. У ізотропному середовищі такі гілки з'являються симетричними парами, які відповідають хвилям, що біжать в протилежних напрямках.