**БІБЛІОГРАФІЯ**

1. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: «ИЛ», 1963.
2. Райзер Г. Комбинаторная математика. М.: «Мир», 1966.
3. Холл М. Комбинаторика. М.: «Мир», 1970.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: «Наука», 1969.
5. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. Київ, “Вища школа”, 1972.
6. Айгер М. Комбинаторная теория.. М.:, «Мир», 1982.
7. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: «Наука», 1990.
8. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.:, «Мир», 1990.
9. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики. Кіровоград, РВЦ КДПУ, 2000.

**УДК 511.2**

# ПРИКЛАДИ НЕЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНОСТЕЙ

**Ю.І.Волков, Н.М.Войналович**

В статье приводится несколько примеров нелинейных рекуррентных соотношений первого, второго и четвертого порядков, найдены их решения.

In this paper we consider a few examples of nonlinear recurrences first , second and fourth orders, their solutions are found.

Рекурентні співвідношення (рекурентності) часто зустрічаються в різних розділах математики й програмування. Найповніше вивчені лінійні рекурентності й методи їх розв’язання (див., наприклад, [1]). Що стосується нелінійних рекурентних співвідношень, то загальних методів їх дослідження обмаль і для них потрібні нетривіальні підходи й винаходи, замість застосування шаблонних процедур.

Найпростіший приклад нелінійної рекурентності такий: $y_{n+1} = y_n^2$, $y_0 = 2$, яка породжує послідовність 2, 4, 16,…, $2^{2^n}$,….Число $2^{2^n}$ це кількість булевих функцій від $n$ змінних. Ряд важливих прикладів нелінійних рекурентностей і задач, які приводять до них, розглянуто в [2], [3] і [4].

Так в [3], стор. 33-35, вивчається рекурентність

$$y_{n+1} = y_n^2 - 2 . \qquad (1)$$

Якщо покласти $y_0 = \sqrt{6}$, то отримаємо послідовність $\sqrt{6}$, 4, 14, 194, 37634,…, а якщо взяти $y_0 = 2\sqrt{3}$, то отримаємо послідовність $2\sqrt{3}$, 10, 98, 9604… . Ці послідовності застосовуються в якості теста (Лукаса-Лемера) для перевірки простоти чисел Мерсенна.

Загальний розв’язок співвідношення (1) можна записати так: $y_n = 2\operatorname{ch}(C2^n)$, де $C$ довільна стала.

До рекурентності (1) зводиться й співвідношення $y_{n+1} = y_0 y_1 \cdots y_n + 4$ за допомогою підстановки $y_n = x_n + 2$.

Вивчалась і така рекурентність:

$x_{n+1} = x_n(x_{n+3} + 3)$, яка за допомогою підстановки $x_n = y_n + 2$ зводиться до

$$y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n. \tag{2}$$

Ми розглядаємо сім'ю рекурентностей, до якої належать співвідношення (1) і (2), і знаходимо загальні розв'язки.

**Теорема.** *Нехай* $m \ge 2$ *довільне натуральне число. Тоді рекурентне співвідношення*

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} \frac{m}{m-k} y_n^{m-2k}, \tag{3}$$

*має загальний розв'язок*

$$y_n = 2\operatorname{ch}(Cm^n), \tag{4}$$

*де C довільна стала.*

*Доведення.* Через те що $y_n = \exp(Cm^n) + \exp(-Cm^n)$, то, з одного боку, $y_{n+1} = \exp(Cmm^n) + \exp(-Cmm^n) = (\exp(Cm^n))^m + (\exp(-Cm^n))^m$, з іншого боку

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} \frac{m}{m-k} (2\cosh(Cm^n))^{m-2k} =$$

$$\left(\frac{1}{2}(2\cosh(Cm^n) + \sqrt{2\cosh(Cm^n) - 4}))\right)^m + \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}(2\cosh(Cm^n) - \sqrt{2\cosh(Cm^n) - 4}))\right)^m,$$

бо многочлен $t_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} \frac{m}{m-k} x^{m-2k}$ задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню $t_{m+2}(x) = xt_{m+1}(x) - t_m(x), t_0(x) = 2, t_1(x) = x$, а звідси

$$t_m(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^m + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^m.$$

Далі права частина (5) елементарними перетвореннями зводиться до виразу $(\exp(Cm^n))^m + (\exp(-Cm^n))^m$.

Співвідношення (3) узагальнює рекурентності (1) і (2), бо (1) отримується з (3), якщо взяти *m*=2, а (2) – якщо взяти *m*=3.

Якщо в (3) покласти *m*=4, то отримаємо співвідношення

$$y_{n+1} = y_n^4 - 4y_n + 2. \tag{5}$$

Якщо в (3) покласти *m*=5, то отримаємо співвідношення

$$y_{n+1} = y_n^5 - 5y_n^3 + 5y_n . \qquad (6)$$

З (4) можна отримувати у явному вигляді й частинні розв'язки рекурентностей (3). Наприклад, якщо покласти $y_0 = \sqrt{6}$ , то частинний розв'язок набуває вигляду:

$$y_n = 2\,\mathrm{ch}\left( m^n \ln\left( \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \right)\right).$$

Якщо взяти $m$=2, то тест Лукаса-Лемера можна сформулювати так:

*Для того , щоб число Мерсенна* $M_p = 2^p - 1$ *було простим, необхідно і досить, щоб число* $2\,\mathrm{ch}\left( 2^{p-1} \ln\left( \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \right)\right)$ *ділилося на* $M_p$.

Використовуючи послідовність, яка задається співвідношенням (5) з початковим членом $y_0 = \sqrt{6}$ , можна отримати ще й таку модифікацію теста Лукаса-Лемера:

*Для того , щоб число Мерсенна* $M_p$ *було простим, необхідно і досить, щоб член послідовності* (5) *з номером* $(p\text{-}1)/2$ *ділився на* $M_p$.

Наприклад, $y_1$=14 ділиться на $M_3$=7, $y_2$=37634 ділиться на $M_5$=31 , $y_3$=2005956546822746114 ділиться на $M_7$=127.

Якщо в (4) взяти $C = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $y_n = L_{(2m)^n}$ - числа Люка, $\frac{y_n}{\sqrt{5}} = F_{(2m+1)^n}$ - числа Фібоначчі, а через те, що $L_k = \frac{F_{2k}}{F_k}$, то, наприклад, з співвідношень (1), (2), (3), (6) випливають такі співвідношення для чисел Люка і чисел Фібоначчі:

$$L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 1;\; F_{2^n}^2 F_{2^{n+2}} = (F_{2^{n+1}}^2 - 2F_{2^n}^2)F_{2^{n+1}}, n \ge 1;$$

$$F_{3^{n+1}} = F_{3^n}(5F_{3^n}^2 - 3);\; F_{5^{n+1}} = 5F_{5^n}(5F_{5^n}^4 - 5F_{5^n}^2 + 1).$$

Розглянуті вище рекурентні співвідношення були рекурентностями першого порядку. Далі розглянемо декілька рекурентностей другого і четвертого порядків. Перша з них така:

$$y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1} + 1.$$

Безпосередньо перевіряється, що загальний розв'язок цієї рекурентності можна записати у вигляді:

$$y_n = \frac{1}{4b}(a + \sqrt{a^2-1})^n - \frac{b}{a^2-1}(a - \sqrt{a^2-1})^n,$$

де $a$ та $b$ довільні сталі.

Вибираючи сталі $a$ та $b$ різними способами, можна отримати ряд важливих послідовностей.

**Приклад 1**. Нехай $a = x,\ b = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1},\ |x| \geq 1$. Тоді $y_n = U_n(x)$

многочлениЧебишова 2-го роду

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}((x + \sqrt{x^2 - 1})^n - (x - \sqrt{x^2 - 1})^n)$$

.

**Приклад 2**. Нехай $a = x,\ b = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2},\ |x| \leq 1$. Тоді $y_n = \frac{T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$, де

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ - многочлени Чебишова 1-го роду

**Приклад 3**. Нехай $a$=0, $b$=1/2. Тоді

$$y_n = \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n) = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Розглянемо ще одну рекурентность другого порядку:

$$y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1} - (-1)^n.$$

Безпосередньо перевіряється, що загальний розв'язок цієї рекурентності можна записати у вигляді:

$$y_n = \frac{1}{b}\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right)^n - \frac{b}{a^2 + 4}\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right)^n,$$

де $a$ та $b$ довільні сталі.

**Приклад 4**. Нехай $a = 1,\ b = \sqrt{5}$. Тоді $y_n = F_n$ - числа Фібоначчі:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \ldots$$

**Приклад 5**. Нехай $a = 0, b = 2\sqrt{2} - 2$. Тоді

$$y_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n + (1 - (-1)^n)\sqrt{2}),$$

тобто отримаємо періодичну послідовність $1, \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 1, \sqrt{2}, \ldots$

Далі розглянемо рекурентность четвертого порядку:

$$y_n^2 = y_{n-2}y_{n+2} + (-1)^n. \tag{7}$$

Випишемо декілька розв'язків цієї рекурентності.

**Приклад 6**.

$$y_n = \frac{1}{b}\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)^n - \frac{b}{16a^2(a^2 + 1)}\left(a - \sqrt{a^2 + 1}\right)^n,$$

де $a$ та $b$ довільні сталі. Якщо тут покласти $a$ =1, $b$ =1, то отримаємо

$$y_n = (1 + \sqrt{2})^n - \frac{1}{32}(1 - \sqrt{2})^n.$$

Ще два приклади розв'язків рекурентності (7).

**Приклад 7**.

$$y_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

**Приклад 8**.

$$y_n = \frac{1}{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{b}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

де $b$ довільна стала. Якщо ж взяти тут $b=\sqrt{5}$, то отримаємо знову числа Фібоначчі $y_n = F_n$.

Розглянемо ще одну рекурентность четвертого порядку:

$$y_n^2 = y_{n-2}y_{n+2} + 1.$$

**Випишемо декілька розв'язків цієї рекурентності.**

**Приклад 9**.

$$y_n = \frac{1}{4b}\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n - \frac{b}{4a^2(a^2-1)}\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n, \ |a| \ge 1,$$

де $a$ та $b$ довільні сталі. Якщо тут покласти $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}$, то отримаємо

$$y_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n\right).$$

**Приклад 10**.

$$y_n = a\cos n\varphi + b\sin n\varphi,\ \text{де}\ \varphi = \frac{1}{4}\arccos\left(1-\frac{2}{a^2+b^2}\right),$$

$a$ та $b$ такі сталі, що $a^2+b^2 \ge 1$. Якщо тут покласти $a=1,\ b=1$, то отримаємо

$y_n = \cos\frac{n\pi}{8} + \sin\frac{n\pi}{8}$, а якщо взяти $a=0,\ b=1$, то $y_n = \sin\frac{n\pi}{4}$.

## БІБЛІОГРАФІЯ


1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, М., “Наука”, 1967.
2. Aho A.V. and Sloane N.J.A. Some doubly exponential sequences, Fibonacci Quarterly, v.11(1973), pp.429-437.
3. Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов, М.,”Мир”, 1987.
4. Knuth D.E. The Art of computer programming, 3, Addison-Weslay, 1998.