УДК 519.115+372.851

ЯК РОЗВ'ЯЗУВАТИ ПЕРЕЛІЧУВАЛЬНІ ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРИКИ

Н.М. Войналович

На конкретных примерах показано как применяются методы решения перечислительных задач комбинаторики.

We on concrete examples show how methods of decision the enumerative problems of combinatorics are use.

Для розв'язування перелічувальних задач комбінаторики використовуються різноманітні методи. Суть цих методів полягає в наступному. Нехай потрібно підрахувати кількість елементів множини, яка має просте комбінаторне визначення й деяку додаткову структуру. Ця кількість є деякою функцією від натуральних аргументів. Відшукується рекурентне співвідношення, яке задовольняє невідома функція. Для цього задану множину стараються подати у вигляді об'єднання декількох множин, які не мають спільних елементів, а потім використовується правило суми. Часто корисно побудувати множину, відмінну від заданої, але яка має таке ж число елементів як і задана. Тоді, якщо вдається знайти бієкцію між цими множинами і знайти кількість елементів допоміжної множини, то це число буде також потужністю й досліджуваної множини. Паралельно з цим використовується і правило добутку.

Завжди повчальним є розв'язування однієї й тієї ж задачі різними способами (в тому числі й некомбінаторними) і порівняння цих способів. Варто зауважити, що чітку межу між комбінаторними й некомбінаторними методами встановити важко, та це й не завжди потрібно.

Ціль даної статті продемонструвати на простих конкретних прикладах методику застосування розглядуваних теоретичних положень, які тут розглядаються.

Спочатку нагадаємо основні правила комбінаторики.

Правило суми. Нехай скінченні множини X та Y не перетинаються. Тоді

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

(Символом $|M|$ позначається кількість елементів множини M).

Правило добутку. Нехай X та Y довільні скінченні множини . Тоді

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

(Символом $X \times Y$ позначається декартів добуток множин X та Y).

Почнемо з найпростішого, але характерного прикладу.

Приклад 1. Скільки існує n–значних двійкових чисел?

Розв'язання. П е р ш и й с п о с і б. Скористаємося правилом добутку. Першу цифру числа можна вибрати двома способами (або 0, або 1), після цього другу цифру також можна вибрати двома способами і т.д. аж до n–ої цифри. Отже, всіх n–значних двійкових чисел буде $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$.

Другий спосіб. Множину всіх n–значних двійкових чисел розіб'ємо на два класи: до першого з них віднесемо всі числа, у яких перша цифра 0, до другого – у яких перша цифра 1. Нехай y_n це шукана кількість чисел. Тоді у кожному з класів буде по y_{n-1} числу, а через те, що класи не перетинаються, то за правилом суми матимемо $y_n = 2y_{n-1}, y_1 = 2$. Звідси бачимо, що розв'язком отриманої рекурентності буде $y_n = 2^n$.

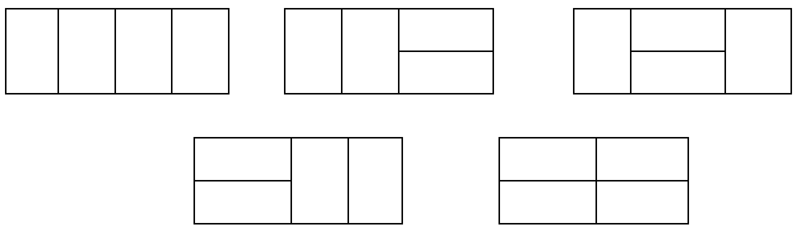
Приклад 2. Скільки існує n-значних двійкових чисел у запису яких не зустрічаються два нулі поруч?

Розв'язання. Розіб'ємо множину всіх таких чисел на два класи: до першого класу віднесемо всі числа, які починаються з одиниці, а до другого – всі числа, які починаються з нуля. Якщо через y_n позначити кількість шуканих чисел, то в першому класі буде y_{n-1} число, а в другому – y_{n-2} чисел, а через те, що класи не перетинаються, то за правилом суми матимемо $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$, тобто, отримуються числа Фібоначчі.

Приклад 3. Скількома способами можна замостити "шахову " дошку розміром

$2 \times n$ кісточками доміно?

Розв'язання. Дошку розміром 2×1 можна замостити одним способом. Дошку розміром 2×2 можна замостити двома способами. Дошку розміром 2×3 можна замостити трьома способами. Дошку розміром 2×4 можна замостити п'ятьма способами:



Позначимо через y_n шукане число способів замощення, а через M множину всіх способів замощення. Тоді $|M| = y_n$, зокрема, $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 5$. Нехай X підмножина тих способів замощення, які закінчуються кісточкою, яка розташована вертикально. Тоді $|X|=y_{n-1}$. Далі, нехай Y підмножина тих способів замощення, які закінчуються двома кісточками, які розташовані горизонтально, тоді $|Y|=y_{n-2}$. Множини X та Y не перетинаються, отже, $y_n = |M| = |X \cup Y| = |X| + |Y| = y_{n-1} + y_{n-2}$. Це співвідношення означає, що y_n це також числа Фібоначчі.

В комбінаториці важливу роль відіграють такі вибірки як розміщення, комбінації, перестановки і всі ці вибірки з повторенням. Особливо часто в різноманітних комбінаторних задачах зустрічаються біноміальні коефіцієнти

C_n^r, комбінаторний смисл яких полягає в тому, що це число комбінацій з n елементів по r, де n кількість елементів множини, з якої здійснюється вибірка, а r –об'єм вибірки.

Приклад 4. Довести, що $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Якщо вже встановлена формула $C_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$, то вказане співвідношення просто перевіряється. Цей

спосіб не є комбінаторним.

Другий спосіб. Нехай $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ універсальна множина з якої вибираються комбінації по r елементів. Ці комбінації r-елементні підмножини множини U. Розіб'ємо множину всіх комбінацій на два класи: до першого класу віднесемо всі комбінації, в які не входить елемент u_1, а до другого – всі комбінації з цим елементом. Комбінацій першого класу буде C_{n-1}^r , а комбінацій другого класу буде C_{n-1}^{r-1} (беремо комбінації по r-1 елементу з множини $\{u_2, \ldots, u_n\}$, а потім до кожної такої комбінації додаємо елемент u_1). Через те, що класи не перетинаються, то за правилом суми отримаємо потрібне співвідношення

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \quad . \qquad (1)$$

Співвідношення (1) обгрунтовує схему (трикутник Паскаля) для знаходження біноміальних коефіцієнтів (щоб отримати число, яке стоїть в n-тому рядку і в r -тій колонці потрібно піднятись на один рядок вище і скласти числа, які стоять в r-тій колонці і в сусідній зліва).

Застосовуючи (1) декілька разів, легко отримати ще й таке співвідношення:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1}.$$

В трикутнику Паскаля це співвідношення можна показати так:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

числа, які стоять в клітинах останнього рядка дорівнюють сумі всіх чисел у виділених колонках вище.

Приклад 5. Скільки існує n-значних двійкових чисел у запису яких присутні рівно r одиниць?

Розв'язання. Перший спосіб. Між такими числами і комбінаціями з n елементів по r встановимо взаємно однозначну відповідність так: двійковому числу, в якому на $j_1, j_2, \ldots, j_r$ місцях стоять 1, а на інших місцях стоять нулі, поставимо у відповідність комбінацію $\{u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_r}\}$, і навпаки. Отже, чисел, у запису яких присутні рівно r одиниць, буде стільки скільки є комбінацій з n елементів по r, тобто C_n^r .

Другий спосіб. Розіб'ємо множину всіх чисел на два класи: до першого класу віднесемо числа, які починаються з 1, до другого – всі інші числа. Якщо через $y_{n,r}$ позначити кількість шуканих чисел, то в першому класі буде $y_{n-1,r}$ чисел, а в другому – $y_{n-1,r-1}$ чисел, а через те, що класи не перетинаються, то за правилом суми матимемо $y_{n,r} = y_{n-1,r} + y_{n-1,r-1}$.

Крім того, $y_{n,0} = 1, y_{n,1} = n, y_{n,n} = 1$, а, отже, числа $y_{n,r}$ задовольняють такому ж рекурентному співвідношенню, як і числа C_n^r, а тому $y_{n,r} = C_n^r$.

Приклад 6. Довести тотожність Коші

$$C_{m+n}^k = \sum_{s=0}^k C_m^s C_n^{k-s}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Перший спосіб. Нехай $m+n$ це кількість учнів у класі, при цьому m це кількість дівчат, а n це кількість хлопців у класі. Розіб'ємо всі комбінації з k учнів на такі групи: в 0-групі жодного хлопця, в такій групі одні дівчата, отже, в цій групі $C_m^k = C_n^o C_m^k$ учнів; в 1-групі один хлопець і k-1 дівчина, отже, в цій групі $C_n^1 C_m^{k-1}$ учнів; і т.д.; в s-групі s хлопців і k-s дівчат, отже, в цій групі (згідно правила добутку) $C_m^s C_n^{k-s}$ учнів; і т.д.. Групи не перетинаються, а тому за правилом суми отримаємо потрібне співвідношення.

Другий спосіб. Тотожність Коші можна довести ще й так. З одного

боку $(a+b)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k a^k b^{m+n-k}$,

з іншого боку

$$(a+b)^{m+n} = (a+b)^m (a+b)^n = \sum_{s=0}^m C_m^s a^s b^{m-s} \sum_{j=0}^n C_n^j a^j b^{n-j} =$$

$$\sum_{s=0}^m \sum_{j=0}^n C_n^j C_m^s a^{s+j} b^{m+n-s-j},$$

прирівнюючи коефіцієнти при $a^k b^{m+n-k}$ отримаємо

$$C_{m+n}^k = \sum_{s+j=k} C_m^s C_n^j = \sum_{s=0}^k C_m^s C_n^{k-s}.$$

Приклад 7. Вивести формулу для знаходження числа комбінацій з повторенням з n елементів по r.

Розв'язання. Перший спосіб. Нехай $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ універсальна множина з якої вибираються комбінації по r елементів з повторенням.

Поставимо у відповідність кожній такій комбінації $n+r-1$-значне двійкове число, у запису якого міститься рівно $n-1$ одиниця, при цьому перед першою одиницею числа стоять нулі, кількість яких дорівнює кількості елементів u_1, які є в комбінації; перед другою одиницею числа стоять нулі, кількість яких дорівнює кількості елементів u_2, які є в комбінації; і т.д.; після останньої одиниці числа стоять нулі, кількість яких дорівнює кількості елементів u_n, які знаходяться в комбінації; всього r нулів (якщо у комбінації якийсь елемент множини U відсутній, то у запису числа будуть відсутні відповідні нулі).

Враховуючи результат прикладу 5, отримаємо таку відповідь: число комбінацій з повторенням з n елементів по r дорівнює $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^r$.

Д р у г и й   с п о с і б. Візьмемо яку-небудь комбінацію з множини U і перенумеруємо елементи цієї комбінації від 1 до r. Далі до кожного отриманого номера додамо 1, якщо це номер елемента u_2; додамо 2, якщо це номер елемента u_3; і т.д. ; додамо число n-1, якщо це номер елемента u_n. В результаті цієї процедури отримаємо підмножину з r різних чисел з множини $\{1, 2, \ldots, n+r-1\}$, а таких підмножин з одного боку буде C_{n+r-1}^r, а з другого боку їхня кількість співпадатиме з числом комбінацій з повторенням з n елементів по r.

Приклад 8. Знайти кількість розв'язків в невід'ємних цілих числах рівняння

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r .$$

Розв'язання. Поставимо кожному розв'язку нашого рівняння таку комбінацію з повторенням з n елементів по r: в ній буде x_1 елементів u_1, x_2 елементів u_2, …, x_n елементів u_n. Тому кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах даного рівняння дорівнює числу C_{n+r-1}^r.

При розв'язуванні перелічувальних задач часто отримуються рекурентні співвідношення, які бажано розв'язати. Якщо ці рекурентності лінійні, то добре відомі методи їх розв'язування (див., наприклад, [9], розділ III). Так, розв'язок рекурентністі, яка зустрічалася в прикладах 2 і 3, записуться у вигляді знаменитої формули Біне для чисел Фібоначчі

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Розглянемо ще одну задачу, де з'яляється рекурентність.

Приклад 9. З першого на другий поверх ведуть сходи з n сходинок. По ним можна рухатись звичайним чином сходинка за сходинкою, через одну сходинку, через дві сходинки. Скількома способами можна піднятись з першого поверху на другий?

Розв'язання. Множину всіх способів руху розіб'ємо на три множини: M_1, M_2, M_3. До першої множини віднесемо ті способи, коли останній крок звичайний; до другої множини віднесемо ті способи, коли останній крок здійснюється через сходинку; до третьої множини віднесемо ті способи, коли останній крок здійснюється через дві сходинки.

Якщо через y_n позначити кількість способів, то $y_n = |M_1| + |M_2| + |M_3|$, але $|M_1| = y_{n-1}, |M_2| = y_{n-2}, |M_3| = y_{n-3}$, тому згідно правила суми

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3}, \qquad (3)$$

при цьому $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3$ і ще вважатимемо, що $y_0 := 0$.

Для розв'язування рекурентності (3) потрібно знайти корені характеристичного рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Це рівняння має один дійсний корінь

$\lambda = \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \frac{\sqrt{33}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \frac{\sqrt{33}}{9}} + \frac{1}{3} \approx 1{,}83928675521416$ і два комплексно спряжених кореня $\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, де ρ і φ , відповідно, модуль і аргумент комплексного числа

$$-\sqrt[3]{\frac{19}{216} - \frac{\sqrt{33}}{72}} - \sqrt[3]{\frac{19}{216} + \frac{\sqrt{33}}{72}} + \frac{1}{3} + i\left(\sqrt[3]{\frac{19\sqrt{3}}{72} - \frac{\sqrt{11}}{8}} - \sqrt[3]{\frac{19\sqrt{3}}{72} + \frac{\sqrt{11}}{8}}\right).$$

Обчислення дають $\rho \approx 0{,}737352705760327, \varphi \approx -2{,}17623354549187$. Тоді загальний розв'язок рекурентності (3) буде таким $y_n = C_1\lambda^n + \rho^n(C_2\cos n\varphi + C_3\sin n\varphi)$, де C_1, C_2, C_3 довільні сталі. Потрібні значення цих сталих для нашого випадку можна знайти, якщо скористатись початковими значеннями шуканої послідовності. Для цього потрібно розв'язати таку систему лінійних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\lambda + \rho(C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi) = 1 \\ C_1\lambda^2 + \rho^2(C_2\cos 2\varphi + C_3\sin 2\varphi) = 2 \end{cases}$$

Для запису відповіді досить визначити $C_1 = 0{,}519034602104582$, бо через те, що $\rho < 1$, то y_n дорівнюватиме найближчому цілому до числа

$$C_1\lambda^n = 0{,}519034602104582 \cdot (1{,}83928675521416)^n,$$

наприклад, $C_1\lambda^9 = 125{,}033...$, отже $y_9 = 125$.

Для розв'язування перелічувальних задач комбінаторики використовується ще один потужний метод, метод генератрис, але цей метод потребує окремої розмови.

Багато інших цікавих прикладів можна знайти в книгах [4] і [5]. Для поглибленого вивчення цих питань рекомендуємо книги, список яких наведено в бібліографії до статті.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: «ИЛ», 1963.
2. Райзер Г. Комбинаторная математика. М.: «Мир», 1966.
3. Холл М. Комбинаторика. М.: «Мир», 1970.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: «Наука», 1969.
5. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. Київ, “Вища школа”, 1972.
6. Айгер М. Комбинаторная теория.. М.:, «Мир», 1982.
7. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: «Наука», 1990.
8. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.:, «Мир», 1990.
9. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики. Кіровоград, РВЦ КДПУ, 2000.

УДК 511.2

ПРИКЛАДИ НЕЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНОСТЕЙ

Ю.І.Волков, Н.М.Войналович

В статье приводится несколько примеров нелинейных рекуррентных соотношений первого, второго и четвертого порядков, найдены их решения.

In this paper we consider a few examples of nonlinear recurrences first , second and fourth orders, their solutions are found.

Рекурентні співвідношення (рекурентності) часто зустрічаються в різних розділах математики й програмування. Найповніше вивчені лінійні рекурентності й методи їх розв’язання (див., наприклад, [1]). Що стосується нелінійних рекурентних співвідношень, то загальних методів їх дослідження обмаль і для них потрібні нетривіальні підходи й винаходи, замість застосування шаблонних процедур.

Найпростіший приклад нелінійної рекурентності такий: $y_{n+1} = y_n^2$, $y_0 = 2$, яка породжує послідовність $2, 4, 16, \ldots, 2^{2^n}, \ldots$. Число 2^{2^n} це кількість булевих функцій від n змінних. Ряд важливих прикладів нелінійних рекурентностей і задач, які приводять до них, розглянуто в [2], [3] і [4].

Так в [3], стор. 33-35, вивчається рекурентність

$$y_{n+1} = y_n^2 - 2. \qquad (1)$$

Якщо покласти $y_0 = \sqrt{6}$, то отримаємо послідовність $\sqrt{6}$, 4, 14, 194, 37634,…, а якщо взяти $y_0 = 2\sqrt{3}$, то отримаємо послідовність $2\sqrt{3}$, 10, 98, 9604… . Ці послідовності застосовуються в якості теста (Лукаса-Лемера) для перевірки простоти чисел Мерсенна.

Загальний розв’язок співвідношення (1) можна записати так: $y_n = 2\,\mathrm{ch}(C2^n)$, де C довільна стала.

До рекурентності (1) зводиться й співвідношення $y_{n+1} = y_0 y_1 \cdots y_n + 4$ за допомогою підстановки $y_n = x_n + 2$.