УДК 512

НЕРАВЕНСТВА В РАЗЛИЧНЫХ ПОЛЯХ

З.Е. Филер

Розглядаються нерівності в різних полях (дійсних, комплексних та кватерніонів) з допомогою переходу до рівнянь з параметрами при розширенні поняття нерівності.

Inequalities are examined in the different fields (actual, complex and кватернионов) by passing to equalizations with parameters at expansion of concept of inequality.

Линейные неравенства. Рассматриваются решения классических неравенств в различных множествах *методом невязки*, т.е. заменой их соответствующими уравнениями, где *положительная* невязка r изменяется на бесконечном интервале (первые две колонки) или на отрезке (0; 1).

Таблица

R	Действительные a, b, c, d, x, r>0	$ax<b$	$ax>b$	$b-c<ax<b+d$
		$ax=b-r$	$ax=b+r$	$ax=b-c+(d+c)r$ $0<r<1$
		$x=(b-r)/a$	$x=(b+r)/a$	$x=(b-c+(d+c)r)/a$
C	Комплексные a, b, c, d, x r>0	$x=a^*(b-r)/\lvert a\rvert^2$	$x=a^*(b+r)/\lvert a\rvert^2$	$x=a^*(b-c+(d+c)r)/\lvert a\rvert^2$, $0<r<1$
K	Кватернионы a, b, c, d, x r>0	$x=a^*(b-r\lvert a\rvert^2$	$x=a^*(b+r)/\lvert a\rvert^2$	$x=a^*(b-c+(d+c)r)/\lvert a\rvert^2$
		$xa<b$	$xa>b$	$b-c<xa<b+d$
		$x=(b-r)\ a^*\ \lvert a\rvert^2$, $r>0$	$x=(b+r)a^*/\lvert a\rvert^2$, $r>0$	$x=(b-c+(d+c)r)a^*/\lvert a\rvert^2$, $0<r<1$

Очевидно, формулы для решения неравенств во множествах **C** и **K** одинаковы. Но ввиду некоммутативности умножения в теле кватернионов, для неравенств $xa<b$, $xa>b$ *и* $b-c<xa<b+d$ приходится использовать умножение справа на сопряжённый к a кватернион a^*, для получения квадрата модуля $|a|^2 = aa^*$, что и даёт формулы в последней строке. Граничные значения $-c$ и d в последнем столбце должны быть хотя бы лексикографически упорядочены.

Подчеркнём ещё раз, что здесь $r > 0$ в привычном смысле (как действительная величина).

1. Примеры решения неравенств с соответствующими графиками

1. $3x<2 \Rightarrow 3x=2-r,\ r>0 \Rightarrow x=(2-r)/3 \in R$.

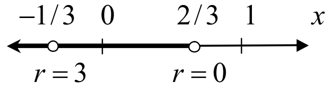


Рис. 1

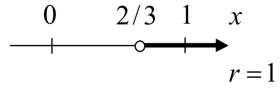


Рис. 2

2. $3x>2 \Rightarrow 3x=2+r,\ r>0 \Rightarrow x=(2+r)/3 \in R.$

3. $(3+i)x<2-i \Rightarrow (3+i)x=2-r-i,\ r>0 \Rightarrow x=(2-r-i)/(3+i),$

$$x=(5-3r)/10-i(5-r)/10 \in C.$$

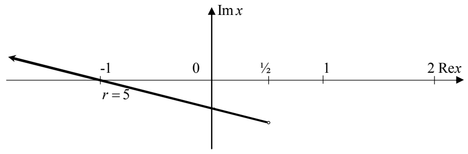


Рис. 3

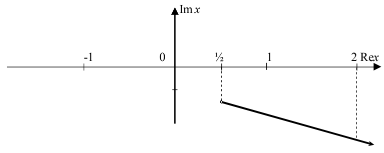


Рис. 4

4. $(3+i)x>2-i \Rightarrow (3+i)x=2+r-i,\ r>0 \Rightarrow x=(2+r-i)/(3+i),$

$$x=(5+3r)/10-i(5+r)/10 \in C.$$

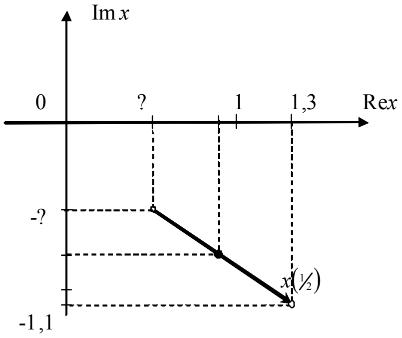


Рис. 5

5. $2-i<(3+i)x<5-2i \Rightarrow (3+i)x=2-i+r(3-i) \Rightarrow x=(2-i+r(3-i))/(3+i)=(2-i+r(3-i))$
$\cdot(3-i)\ /10=(5-5i+r(8-6i))/10;\ x(0)=0{,}5-0{,}5i,\ x(1)=1{,}3-1{,}1i.$

Множество решений неравенств во всех здесь рассмотренных примерах является *осью* или *отрезком* прямой, т.е. **одномерно**. Оно является прообразом соответствующего линейного отображения: в примере 3, например, оно переводит *луч* $r>0$ в *луч*, изображённый на рис. 3. При привычном употреблении знака неравенства «< », как мы уже отмечали, необходимо хотя бы лексикографическое упорядочение левой и правой частей двойного неравенства (рис. 5).

Интересно рассмотреть пример «обмена» граничных значений: 6. $5-2i \subset (3+i)x \subset 2-i \Rightarrow (3+i)x=5-2i+r(-3+i) \Rightarrow x=(5-2i+r(-3+i))\cdot(3-i)/10=(13-11i-r(8-6i))/10$; $x(0)=1{,}3-1{,}1i$, $x(1)=0{,}5-0{,}5i$. Концы отрезка x(r) просто поменялись местами. Это соответствует значению знака упорядочения « $\subset$ » на «больше». Убедимся, что x(0,5) лежит посередине этого отрезка, вычислив $x(0{,}5)=0{,}9-0{,}8i$.

Нам днями стала известна одна работа [1, с.31-32, 34], где упоминается возможность упорядочения во множестве комплексных чисел. Процитируем из неё соответствующие места на языке оригинала. «Зауважимо, що досить поширеною є думка про неможливість упорядкувати множину комплексних чисел, тобто ввести у множині **C** відношення < або >. Насправді це не так. Домовимося комплексне число $z=a+bi$ вважати меншим за комплексне число $\lambda=c+di$ і писати: $z<\lambda$, якщо $a<c$, або якщо $a=c$ і $b<d$. Наприклад: $100i<2<2+i<3-500i$. Порівнюючи комплексні числа, зважають, яке з комплексних чисел має більшу дійсну частину, а якщо вони дорівнюють одна одній, то порівнюють уявні частини (так само, як порівнюють скінченні десяткові дроби, розміщують слова у словнику або прізвища у класному журналі). Визначене так відношення < у множині комплексних чисел:

а) *антисиметричне* – якщо $z<\lambda$, то відношення $\lambda<z$ неможливе;

в) *транзитивне* – якщо $z<\lambda$, $\lambda<\mu$, то $z<\mu$;

в) *зв'язне* – якщо $z\neq\lambda$, то або $z<\lambda$, або $z>\lambda$. …

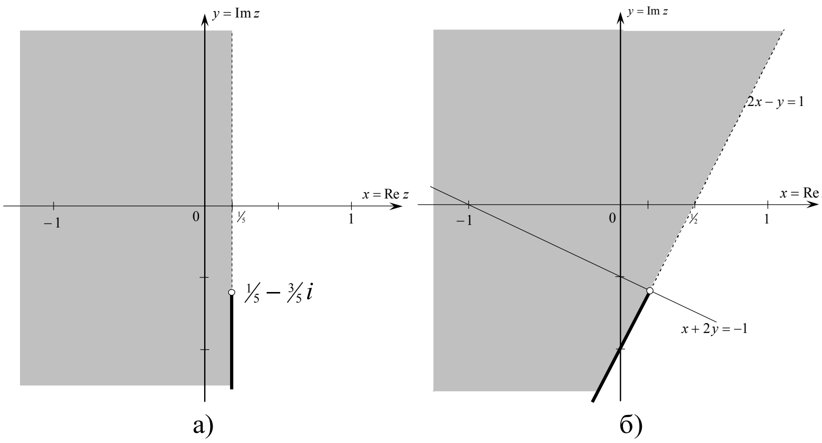
Треба також чітко усвідомити, що множина комплексних чисел може бути упорядкована: як і дійсні, комплексні числа можна за певними правилами порівнювати. З цим фактом і в наш час ще не всі погоджуються. А якщо погоджуються, то заперечують проти застосування знака < або > для порівняння комплексних чисел. Але ж знак < або > використовується для позначення відношення порядку не тільки в множині дійсних або комплексних чисел, а й взагалі, в довільній упорядкованій множині (див. [6, с.140, 384, 385]).

Примітка. Крім поняття «упорядкована множина» є ще поняття «упорядковане *поле*». Поле комплексних чисел упорядкувати не можна, тому що крім вимог антисиметричності, транзитивності і зв'язності для упорядкованого поля повинна виконуватись ще одна умова: якщо $a>0$, то $a^2>0$. А ввести відношення >, для якого виконувалися б всі чотири умови, в множині комплексних чисел не можна.». Тут приведена ссылка на известную книгу Н. Бурбаки «Теория множеств». Среди упражнений есть

4. *Розмістити* числа $3+5i$, $2i$, $3-5i$, 2 у порядку зростання;

5. *Розв'язати нерівність* $(2+i)z<1-i$.

Ответов на упражнения в [1, с.34] не дано, метод решения упражнения 5 – не указан. Если сохранять школьные правила (при делении на положительное число знак неравенства сохраняется), то решением будет: $z<(1-i)/(2+i)=(1-3i)/5$. Подчеркнём, что здесь знак < обозначает область, где действительная часть *x* меньше 1/5 с её полуграницей – полупрямой $x=1/5$ при $y<-3/5$ (Рис.6а). Если же правило деления на «положительное» число $2+i$ тут «не работает», то будем искать $z = x+ iy$ с действительными *x* и *y*. Непосредственно подставив его в данное неравенство, получим: $(2+i)(x+iy)< 1-i\Rightarrow 2x-y+i(x+2y)<1-i\Rightarrow 2x-y<1,\ \forall(x+2y)$ или $2x-y=1,\ x+2y<-1$. Областью – решением является затемненная часть лоскости с частью граничной прямой, отсекаемой другой прямой $x+2y=-1$ сверху (рис. 6б).



а) б)

Рис. 6

Решим это неравенство методом «комплексной невязки» $r=s+it$, прибавляемой в левую (меньшую) сторону неравенства: $(2+i)(x+iy)+s+it=1-i$

$\Rightarrow$ 2x-y+s=1, x+2y+t= -1, s>0,$\forall$t или при s=0, t>0 $\Rightarrow$ та же область, что и на Рис.6б. Таким образом, «школьное правило» (сохранение знака неравенства при делении на число, «большее нуля»), здесь *не приемлемо*.

В отличие от метода действительной невязки, дающей решение-отрезок прямой, метод *комплексной невязки* даёт кусок плоскости – двумерный объект – множество точек z(s,t), двухпараметрическое семейство точек комплексной плоскости. Метод действительной невязки даёт часть решения z(s,0). Даже для действительных неравенств можно рассматривать *комплексные решения*. Для примера 1, когда вместо числовой *полуоси x<2/3* будет *полуплоскость x<2/3,* $\forall y$ с частичной границей x=2/3, y<0. Аналогично обобщается решение неравенства x>2/3. Рассматривая решение неравенства в действительной области (на числовой оси), мы получаем тоже одномерное множество; комплексное решение с действительной невязкой даёт одномерное множество решений, а с комплексной невязкой – двумерное решение. Для примера 5 имеем 0<s+it<1, т.е. 0<s <1, $\forall$it. Поэтому в уравнение *(3+i)x=2-i+r(3-i)* надо вместо x вставить (x+iy), а вместо *r* - значение *s+it*: *(3+i)(x+iy)=2-i +(s+it)(3-i)*$\Rightarrow$*3x-y+i(x+3y)=2-i+3s+t+i(3t-s)*$\Rightarrow$

3x-y=2+3s+t, x+3y=-1+3t-s$\Rightarrow$*0<s<1,* $\forall$*t; s=0*$\Rightarrow$*t>0; s=1*$\Rightarrow$*t<0.* Исключив *t*, получим уравнение -8x+6y=-7-10 *s*. При *s=0* имеем прямую -8x+6y=-7; при *s=1*- прямую -8x+6y=-17. Неравенство *0<s<1* выполняется *между* ними. Исключив *s,* получим прямую *6x+8y=-1+10 t. При t=0* имеем прямую *6x+8y=-1,* которая при пересечении с прямыми -8x+6y=-7-10 *s* даст точки. Они отсекают на прямых *s=0 и s=1* полупрямые противоположных направлений.

Квадратные неравенства в широком смысле рассмотрим на примере: $x^2+4x+5<0$. Методом комплексной невязки s+it для комплексного аргумента x+iy, получаем линии $y^2-(x+2)^2=1+s$, 2(x+2)y=-t; s>0, при s=0 и t>0. Это **гиперболы** с вертикальным расположением вершин на прямой x=

-2, и полуосями a=b= $\sqrt{1+s}$ и граничной гиперболой при s=0 (Рис.7). Она присоединяется к области так: левая верхняя ветвь и правая нижняя. А раньше, при неравенствах в обычном (узком) смысле, была только эта действительная **ось** гипербол [2, рис.3]. Уравнения гипербол $\frac{y^2}{1+s}-\frac{(x+2)^2}{1+s}=1$. На границе s=0 и (x+2)y= $-\frac{t}{2}$, t>0. Неравенство $x^2+4x+3<0$ эквивалентно уравнениям $y^2-(x+2)^2=-1+s$, 2(x+2)y=-t, s>0; при s=0$\Rightarrow$t>0. При s<1 это гиперболы с вершинами на оси 0x, а при s>1- гиперболы с вершинами на оси x=-2. При s=1 – это асимптоты этих гипербол. При t=0 или x=-2 и

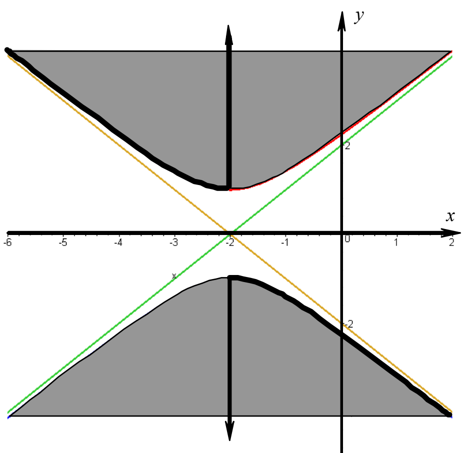


Рис. 7

$y=\pm\sqrt{-1+s}$, или y=0 при $x+2=\pm\sqrt{1-s}$ при 1> s.

Рассмотрим еще пример $x^2+4x+5>0$. Во множестве действительных чисел решением этого неравенства будут точки действительной оси. Для поиска комплексных решений применим сначала метод действительной невязки r>0: $x^2+4x+5=r$, откуда $x=-2\pm\sqrt{4-(5-r)}=-2\pm\sqrt{r-1}$. При r≥1 получаем эти действительные решения; r<1 даст *комплексные* решения $x=-2\pm i\sqrt{1-r}$. Решения графически изображаются в виде креста с бесконечной горизонтальной поперечиной.

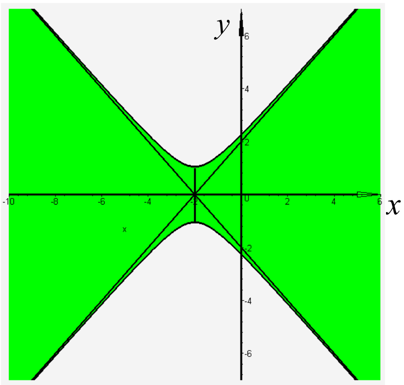


Рис. 8

Методом комплексной невязки s+it для комплексного аргумента x+iy, получаем линии $y^2-(x+2)^2=1-s$, $2(x+2)y=t$, 1>s>0; при s=0 и t>0. Это **гиперболы** с горизонтальным расположением вершин на прямой y=0. Асимптоты гипербол отделяют области, лежащие вне заштрихованных на рис. 7 гипербол при s>1. Сами асимптоты принадлежат области решений при s=1.

В общем случае, неравенство a<f(z)<b эквивалентно уравнению с комплексной невязкой s+it=(f(z)-a)/(b-a)≡φ(z). Переходя к действительной и мнимой частям функции φ(z)= u(x,y)+ iv(x,y), где u(x,y) =Reφ(z), v=Imφ(z); 0<s<1, ∀t; при s=0 будет линия u(x,y)=0; u(x,y)>0 с той стороны полуплоскости, куда «смотрит» gradu(x;y). Граница включена там, куда «смотрит» gradv(x,y) от точки пересечения u(x,y)=0, v(x,y)=0. При s=1 – вторая *граница* области; её часть, с перпендикуляром -gradv(x,y) включена в область-решение.

При классическом понимании решения неравенства имеем v(x,y) ≡ 0. Для неравенства f(z)<0 решение – полуплоскость, как и для неравенства 0<f(z). Например, для неравенства exp(z) <0 имеем $e^x(\cos(y)+i\sin(y))\Rightarrow u=e^x\cos(y)$, $v=e^x\sin(y))\Rightarrow u=0$ при $\cos(y)=0\Rightarrow y=\pi/2+\pi n$; gradu=$\{e^x\cos(y),-e^x\sin(y)\}$ при $y=\pi/2+\pi n$; gradu=$\{e^x0,\ -\ e^x(-1)^{n-1}\}=e^x\ \{0;(-1)^n\}$. При n=0 это вектор, который «смотрит вверх» от оси Ox. На границе области – прямой y=π/2 вектор gradv=$\{e^x\sin(y),\ e^x\cos(y)\}=e^x\{1;0\}$ “смотрит” вправо⇒левая часть границы – прямой y=π/2, включается в область. Решение неравенства – совокупность горизонтальных полос типа π/2<y<3π/2, где exp(y)<0. Между такими полосами функция имеет знак «+» (в широком смысле). В узком смысле, решения – параллельные прямые y=nπ - середины полос – решений в широком смысле.

Упорядочение комплексных чисел в алгебраической форме z=x+iy с преобладающей действительной частью, не является единственным. Мы уже ранее рассматривали уравнение f(z)=r·exp(iφ) как обобщение неравенств $f(z)<0$ при $\varphi=\pi$ и $f(z)>0$ при $\varphi=0$ с $r>0$. Если считать комплексное $z<\lambda$ при модуле z, меньшем модуля λ, и любых аргументах φ, а при равных модулях – аргументы φ упорядочить по возрастанию на отрезке $[0;2\pi)$, то получим упорядочение в кольце, в отличие от упорядочения в вертикальных полосах.

Интересно найти физический смысл неравенств в комплексной области в широком смысле, кроме тривиального сравнения комплексных сопротивлений Z для синусоидальных токов, когда $Z=R+i(L\omega-1/(C\omega))$ и сравнении контуров R-L-C по активному сопротивлению R, а при равных активных сопротивлениях – по реактивным сопротивлениям $(L\omega- 1/(C\omega))$. В полярной системе имеем $Z= |Z|\exp(i(\omega t-\theta)$, $|Z| = \sqrt{R^2+(L\omega-1/(C\omega))^2}$, $tg\theta=(L\omega-1/C\omega)/R.$ Сравнение может идти по модулям R, а при равных R – по аргументам θ.

В общем случае комплексные числа $z=r\cdot e^{i\varphi}$ можно сравнивать по модулю r, при равных модулях – по аргументу $\varphi\in[0; 2\pi)$.

В 1950-51 учебном году, учась в 10-ом классе вечерней школы, автор «по наследству» от товарища, вынужденного оставить физмат Сталинского пединститута по состоянию здоровья, получил учебники по математике и физике для вузов. В учебнике высшей алгебры Г.М. Шапиро, он увидел решение неравенства $ch^k < 0$ при комплексных с и h, приняв его как должное. Поэтому через почти 50 лет он не удивился появлению таких решений для квадратного неравенства $x^2+4x+5<0$ у своего ученика С.П.Ткаченко при использовании метода невязки. Правда, пришлось убеждать коллег в правомерности такого подхода.

Смущало только то, что **мера** множества решений на комплексной плоскости, равна нулю, тогда как для действительных решений (на прямой) она не равна нулю в общем случае. Переход к комплексным решениям неравенств в широком смысле делает её неравной нулю. Противоположные неравенства (> и <) в *широком* смысле (при комплексной невязке s+it) имеют решения – области, взаимно дополняющие друг друга до комплексной плоскости. Это иллюстрирует и рис. 7 – 8. Решения же неравенств в *узком* смысле (для действительной невязки r) дополняют друг друга до бесконечного креста – прямых $\operatorname{Re}x=-2$ и $\operatorname{Im}x=0$.

Это позволяет надеяться на использование аппарата неравенств для работы с *фигурами*, а не линиями.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кужель О.В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа. – Київ, Вища школа, 1974. – 80 с.
2. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв’язки квадратної нерівності// Матем. в школі, 2003, №2. – С. 47 – 49.