УДК 519.53 + 517.987

НЕПРЕРЫВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ МЕРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНДУКТИВНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В.А. Романов

Досліджено структуру неперервних компонентів векторної міри в сепарабельному просторі Фреше відносно індуктивних підпросторів.

The structure of continuous components of vector measure in a separable Frechet space with respect to inductive subspaces is invtstigated.

1. Введение. Известно, что для каждого линейного подпространства H данную меру в топологическом векторном пространстве можно единственным способом разложить в сумму H-непрерывной и вполне H-разрывной мер. Для скалярной меры этот результат содержится в работах [1], [2], а для векторной – в работе [3]. Упомянутое разложение зависит от подпространства H и не зависит ни от какой другой меры, в то время как разложение Лебега в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной мер зависит от некоторой другой меры, имеющей такую же самую область определения (см., например, [4, с. 60]). Поскольку никакая нетривиальная мера в бесконечномерном пространстве не может быть непрерывной по всем направлениям, то естественно потребовать, чтобы подпространство H отличалось от всего пространства. Также известно ([5], [6]), что при построении топологических объектов бесконечномерного анализа часто возникают индуктивные подпространства. Поэтому представляет интерес исследование структуры непрерывных компонент меры относительно таких подпространств.

2. Постановка задачи. Пусть X – сепарабельное пространство Фреше, то есть полное сепарабельное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство, У – банахово пространство. Под векторными мерами в X понимаем счетно-аддитивные функции множества конечной полной вариации, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающие значения в пространстве У.

Пусть x – элемент, а H – линейное подпространство (не обязательно замкнутое) пространства X.

Определение 1. Векторная мера Ф называется *непрерывной по направлению x,* если для каждого борелевского подмножества B пространства X при стремлении коэффициента c к нулю векторная величина Ф (B + cx) имеет предел, равный Ф (B). Векторная мера называется *H-непрерывной,* если она непрерывна по всем направлениям из H.

Определение 2. Векторная мера Ф называется *вполне H-разрывной,* если не существует нетривиальной H-непрерывной векторной меры, вариация которой мажорируется вариацией векторной меры Ф.

Ясно, что эти определения применимы и для мер с числовыми значениями.

Напомним, что если линейное подпространство H пространства X представимо как объединение возрастающей по включению последовательности линейных подпространств H (к), то оно называется *индуктивным*.

Цель статьи состоит в том, чтобы установить структуру непрерывной компоненты меры относительно индуктивного подпространства H, если известны непрерывные компоненты этой же меры относительно подпространств H (к).

3. Результаты работы. Сначала рассмотрим случай числовой меры с неотрицательными значениями.

Теорема 1. *Пусть H – линейное подпространство сепарабельного пространства Фреше X, совпадающее с объединением возрастающей по включению последовательности линейных подпространств H (к), M – неотрицательная мера в пространстве X и C – ее непрерывная компонента относительно H. Тогда мера C представляет собой предел относительно сходимости по вариации последовательности C (к) непрерывных компонент меры M относительно подпространств H (к).*

Доказательство. Поскольку условие непрерывности по большему подпространству сильнее, чем по меньшему, то с возрастанием номера к последовательность непрерывных компонент меры M относительно возрастающих подпространств H (к) монотонно убывает на каждом борелевском подмножестве B пространства X. Но тогда по теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности для каждого такого B существует предел числовой последовательности C (к) (B). Поскольку этот предел зависит от выбора множества B, то будет логичным обозначить его через A (B). Итак, возникла функция множества A с неотрицательными значениями, которая представляет собой предел последовательности мер, а потому по теореме Никодима [7, с. 177] тоже является мерой. Поскольку разность мер C (к) и A неотрицательна, то ее значение на всем пространстве X совпадает с полной вариацией указанной разности, а потому последовательность мер C (к) сходится к мере A не только на каждом измеримом множестве, но и по вариации. Ясно также, что мера A не превосходит меру M.

Докажем, что построенная мера A совпадает с H-непрерывной компонентой C меры M.

Действительно, с одной стороны, для каждого номера к подпространство H (к) включено в H, а потому непрерывная компонента C меры M относительно H мажорируется непрерывной компонентой C (к) этой же меры M относительно H (к). Но тогда мера C мажорируется и пределом последовательности мер C (к), то есть мерой A.

С другой стороны, меры С (к) непрерывны по направлениям из Н (к), а потому из монотонного возрастания по включению последовательности подпространств Н (к) следует, что для каждого натурального числа р, начиная с номера к=р и далее, все меры С (к) становятся Н (р)-непрерывными. Поскольку при переходе к пределу свойство непрерывности по направлениям сохраняется [8], то предельная мера А тоже Н (р)-непрерывна. Ввиду того, что указанная непрерывность имеет место для каждого натурального числа р, мера А непрерывна по всем направлениям, принадлежащим объединению всех подпространств Н (р), а потому Н-непрерывна. Кроме того, мера А мажорируется мерой М. Следовательно, мера А не превосходит Н-непрерывную компоненту меры М, то есть не превосходит меру С.

С учетом ранее доказанной мажорируемости меры С мерой А отсюда следует, что меры А и С совпадают. Поскольку же мера А построена как предел последовательности мер С (к), то этим и завершается доказательство теоремы.

Теперь рассмотрим случай векторных мер.

Теорема 2. *Пусть Ф – векторная мера в сепарабельном пространстве Фреше Х, Т – ее непрерывная компонента относительно линейного подпространства Н, совпадающего с объединением возрастающей по включению последовательности линейных подпространств Н (к). Тогда векторная мера Т представляет собой предел по вариации последовательности Т (к) непрерывных компонент векторной меры Ф относительно подпространств Н (к).*

Доказательство. Пусть М – вариация векторной меры Ф. Известно [7], что вариация векторной меры имеет свойство счетной аддитивности, а потому представляет собой неотрицательную меру. Пусть С (к) – непрерывные, а Д (к) – вполне разрывные компоненты меры М относительно подпространств Н (к).

Поскольку для каждого линейного подпространства непрерывная и вполне разрывная относительно этого подпространства меры всегда взаимно сингулярны [9], то для любого номера к найдутся непересекающиеся борелевские множества Е (к) и А (к), на которых сосредоточены соответственно С (к) и Д (к).

Для каждого номера к рассмотрим две новых векторных меры Т(к) и Р(к), значения которых на каждом борелевском подмножестве В пространства Х равны соответственно значению данной векторной меры Ф на пересечении множеств В и Е(к) и значению Ф на пересечении множеств В и А(к). Тогда из соображений, которые аналогичны рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 1 работы [3], следует, что вариация векторной меры Т(к) совпадает с неотрицательной мерой С(к), а вариация векторной меры Р(к) – с неотрицательной мерой Д(к).

Следовательно, вариации векторных мер Т(к) и Р(к) соответственно Н(к)-непрерывны и вполне Н(к)-разрывны, а потому согласно леммам 2 и 3 работы [3] и сами векторные меры Т(к) и Р(к) соответственно Н(к)-непрерывны и вполне Н(к)-разрывны.

Поскольку для фиксированного номера к вариация векторной меры Ф сосредоточена на объединении множеств Е(к) и А(к), на которых сосредоточены Н(к)-непрерывная и вполне Н(к)-разрывная компоненты этой вариации, то и сама Ф сосредоточена на объединении указанных множеств. Поскольку же упомянутые два множества дизъюнктны, то из построения векторных мер Т(к) и Р(к) следует равенство

Ф = Т (к) + Р (к). (1)

С учетом Н(к)-непрерывности векторной меры Т(к) и вполне Н(к)-разрывности векторной меры Р(к) равенство (1) означает, что векторная мера Т(к) представляет собой Н(к)-непрерывную компоненту векторной меры Ф.

Теперь вернемся к исследованию свойств неотрицательной меры М. Из монотонного возрастания по включению подпространств Н(к) следует, что соответствующие им непрерывные компоненты С(к) меры М монотонно убывают, а вполне разрывные компоненты Д(к) этой же меры М монотонно возрастают. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность борелевских множеств Е(к), на которых сосредоточены меры С(к), монотонно убывает по включению, а последовательность борелевских множеств А(к), на которых сосредоточены меры Д(к), монотонно возрастает. Обозначим через Е пересечение всех множеств Е(к), а через А – объединение всех множеств А(к).

Докажем, что множества Е и А не пересекаются, Действительно, пусть элемент х принадлежит множеству Е. Тогда для каждого номера к элемент х принадлежит множеству Е(к), а потому не может принадлежать непересекающемуся с ним множеству А(к). Поскольку этот факт верен для всех номеров к, то элемент х не может принадлежать множеству А. Тем самым дизъюнктность множеств Е и А доказана.

Теперь опять переходим к векторным мерам. Рассмотрим еще две векторных меры Т и Р, значения которых на каждом борелевском подмножестве В пространства Х равны соответственно значению данной векторной меры Ф на пересечении множеств В и Е и значению Ф на пересечении множеств В и А.

Из построения векторных мер Т(к) и Т следует, что для произвольной системы из конечного числа попарно непересекающихся борелевских подмножеств В(а) пространства Х сумма норм векторных величин

(Т(к) – Т) (В (а))

может быть записана как сумма норм значений векторной меры Ф на множествах, представимых как пересечения множеств В(а) с разностью между множеством Е(к) и множеством Е, а потому не превышает значения вариации Ф на указанной разности. Поскольку вариация векторной меры Ф совпадает с мерой М, то упомянутая сумма норм не превышает значения М на разности множеств Е(к) и Е. Поэтому после перехода в левой части неравенства к верхней грани по всем системам из конечного числа попарно непересекающихся борелевских множеств В(а) получаем, что полная вариация разности между векторными мерами Т(к) и Т не превышает значения меры М на разности множеств Е(к) и Е. Поскольку же последовательность множеств Е(к) монотонно убывает и имеет своим пересечением множество Е, то из счетной аддитивности меры М следует, что значение М на разности множеств Е(к) и Е имеет нулевой предел, когда номер к стремится к бесконечности. Следовательно, последовательность векторных мер Т(к) имеет своим пределом относительно сходимости по вариации векторную меру Т.

Совершенно аналогично доказывается, что последовательность векторных мер Р(к) имеет своим вариационным пределом векторную меру Р.

Вернемся теперь к разложению векторной меры Ф по формуле (1). С учетом установленных фактов о сходимостях последовательностей векторных мер Т(к) и Р(к) можно перейти к пределу в правой части упомянутой формулы. Следовательно, справедлива еще одна формула для разложения векторной меры Ф, а именно:

Ф = Т + Р. (2)

Пусть теперь С и Д - две новые неотрицательные меры, значения которых на каждом борелевском подмножестве В пространства Х равны соответственно значению меры М, совпадающей с вариацией векторной меры Ф, на пересечении множеств В и Е и значению М на пересечении множеств В и А. Тогда по соображениям, аналогичным для тех, которые были для мер С(к) и Д(к), мера С совпадает с вариацией векторной меры Т, а мера Д – с вариацией векторной меры Р.

Из построения мер С и Д с учетом дизъюнктности множеств Е и А, на которых они сосредоточены, следует равенство

М = С + Д. (3)

По соображениям, аналогичным приведенным ранее для последовательности векторных мер Т(к), последовательность неотрицательных мер С(к) сходится по вариации к неотрицательной мере С. В то же время, согласно теореме 1, последовательность мер С(к) сходится по вариации к непрерывной компоненте меры М относительно подпространства Н. Следовательно, мера С совпадает с Н-непрерывной компонентой меры М. Но тогда с учетом равенства (3) можно заключить, что мера Д совпадает с вполне Н-разрывной компонентой меры М.

Теперь напомним, что вариации векторных мер Т и Р совпадают соответственно с мерами С и Д. Следовательно, вариация векторной меры Т

Н-непрерывна, а векторной меры Р – вполне Н-разрывна. Но тогда согласно леммам 2 и 3 работы [3] векторная мера Т Н-непрерывна, а векторная мера Р вполне Н-разрывна. Отсюда с учетом равенства (2) можно заключить, что Т – это и есть Н-непрерывная компонента векторной меры Ф. Поскольку ранее было установлено, что векторная мера Т равна пределу относительно сходимости по вариации последовательности векторных мер Т(к), то тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Как было отмечено в ходе доказательства теоремы 2, для линейного подпространства Н, совпадающего с объединением возрастающей по включению последовательности линейных подпространств Н(к), вполне Н-разрывная компонента меры представляет собой предел по вариации последовательности ее Н(к)-разрывных компонент.

Пример 1. Пусть Х – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем в Х некоторый ортонормированный базис и обозначим через Н(к) линейную оболочку первых к элементов базиса, а через Н – линейную оболочку всех его элементов. Зафиксируем также некоторую суммируемую последовательность положительных чисел р(к), например, совпадающих с обратными величинами квадратов натуральных чисел. Пусть С – центрированная гауссовская мера в пространстве Х, для корреляционного оператора которой все элементы упомянутого базиса являются собственными векторами и отвечают собственным значениям р(к). Такая гауссовская мера непрерывна по всем собственным направлениям своего корреляционного оператора, а потому Н-непрерывна. Далее рассмотрим в каждом из подпространств Н(к) какую-нибудь вероятностную меру М(к), которая абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры Лебега этого подпространства, например, получается из упомянутой меры Лебега с помощью умножения на характеристическую функцию к-мерного единичного куба. Меру М(к) можно задать на каждом борелевском подмножестве В всего пространства Х как ее значение на пересечении В и Н(к). Рассмотрим теперь меру М, равную сумме гауссовской меры С и ряда, слагаемыми которого являются меры р(к) М(к). Поскольку слагаемые этого ряда непрерывны только по направлениям из Н(к), то с учетом возрастания подпространств Н(к) получаем, что Н(к)-непрерывная компонента меры М равна сумме меры С и остатка упомянутого ряда, в который входят слагаемые, начиная с к-того номера. Поскольку фигурирующий здесь ряд сходится, то его остаток имеет нулевой предел, а потому предел последовательности Н(к)-непрерывных компонент меры М совпадает с гауссовской мерой С. Следовательно, для подпространства Н, равного объединению последовательности возрастающих подпространств Н(к), Н-непрерывная компонента совпадает с мерой С. Что же касается вполне Н-разрывных компонент меры М, то они совпадают с частичными суммами упомянутого ряда (имеющими номера к – 1), а потому предел последовательности вполне Н(к)-разрывных компонент равен сумме всего ряда. Следовательно, для подпространства Н вполне Н-разрывная компонента меры М совпадает с суммой упомянутого ряда.

Замечание 2. Кроме индуктивных, при построении объектов бесконечномерного анализа могут возникать проективные подпространства, которые представимы как пересечения убывающих последовательностей линейных подпространств Н(к). Для проективного подпространства Н, в отличие от индуктивного, структура Н-непрерывной компоненты меры не может быть выражена в терминах ее Н(к)-непрерывных компонент. Об этом свидетельствует пример 2.

Пример 2. Пусть Х – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, Н – его конечномерное линейное подпространство, Х(0) – ортогональное дополнение Н. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис подпространства Х(0) и обозначим через Х(к) ортогональное дополнение в Х(0) первых к элементов базиса. Пусть Н(к) = Н + Х(к) – алгебраическая сумма в Х линейных подпространств Н и Х(к). Тогда последовательность подпространств Н(к) убывает и имеет Н своим пересечением. Рассмотрим в пространстве Х две различные невырожденные гауссовские меры М и С, непрерывные по всем направлениям из Н. Поскольку подпространства Н(к) имеют конечные коразмерности, то никакая нетривиальная мера не может быть непрерывной по всем направлениям из Н(к). Следовательно, все Н(к)-непрерывные компоненты обеих гауссовских мер М и С нулевые, а потому совпадают между собой. В то же время Н-непрерывные компоненты этих гауссовских мер равны самим мерам, а потому между собой не совпадают.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Романов В.А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах // Доклады АН СССР. – 1976. – 227, № 3. – С. 569-570.

2. Романов В.А. О разложении меры в линейном пространстве в сумму Н-непрерывной и вполне Н-разрывной мер // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Математика, механика. – 1976. – 31, № 4. – С. 63-66.

3. Романов В.А. Разложения векторных мер // Наукові записки. – Серія: Математичні науки. РВВ КДПУ ім. Володимира Винниченка. – 2009. – Випуск 68. – С. 95-101.

4. Канторович Л.В, Акилов Г.П. Функциональный анализ.–М.: Наука, 1977. – 744 с.

5. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

6. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1959. – 410 с.

7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1962. – 895 с.

8. Романов В.А. Пределы Н-непрерывных мер в гильбертовом пространстве // Успехи математических наук. – 1982. – 37, № 5. – С. 199-200.

9. Романов В.А. Об Н-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Математика, механика. – 1977. – 32, № 1. – С. 81-85.