УДК 532.59

КОНСТРУЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЯК УМОВА ФОРМУВАННЯ ТВОРЧОСТІ В УЧНІВ ТА СТУДЕНТІВ

Г.А.Кушнір, В.А.Кушнір

Розглядається конструювання математичних об'єктів як творчий процес

Means of mathematical objects constructing are viewed by means of creative process.

Сучасні спеціалісти мають володіти певним апаратом конструювання об'єктів з визначеними властивостями. Теперішні чи майбутні інженери – інженерні об'єкти, економісти – економічні, математики – математичні. У профільних школах, коледжах, ліцеях та педагогічних ВНЗ математичних спеціальностей у якості об'єктів конструювання виступають, зокрема, функції з певними властивостями. Покажемо це на прикладах.

Задача 5. Записати приклад неперервної дробово-раціональної функції, для якої пряма y=2x+1 є асимптотою.

Розв'язання. $y(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відповідних степенів. Відомо, що у рівнянні асимптоти $y=ax+b$ функції $y=f(x)$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)\cdot$$

Тоді функцією *y(x)* може бути така дробово-раціональна функція

$$y(x)=\frac{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_2x^2+b_1x+b_0},$$

причому знаменник не повинен мати нулів (функція неперервна згідно умови).

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{(b_2x^2+b_1x+b_0)x}=\frac{a_3}{b_2}\cdot$$

У нашому випадку $a=\dfrac{a_3}{b_2}=2\to b_2=1, a_3=2\cdot$ Для відшукання b маємо

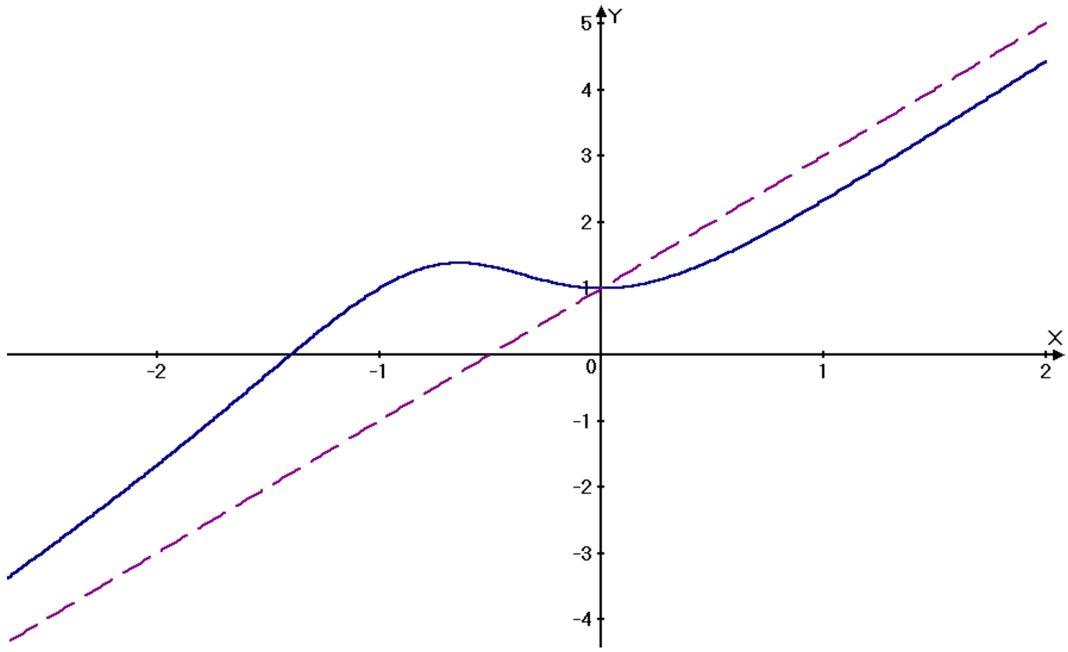
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^2+b_1x+b_0}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(a_2-2b_1)x^2+(a_1-2b_0)x+a_0}{x^2+b_1x+b_0}=$$ Тоді b_0

$=a_2-2b_1=1\to b_1=1, a_2=3.$

підбирається так, щоб дискримінант знаменника був менший нуля: $b_0=1$, a_1 і a_0 вибираються довільно. Шуканою функцією може бути функція вигляду

$$y(x)=\frac{2x^3+3x^2+x+1}{x^2+x+1}\cdot$$

В ІКТі AG будуємо графіки функції та її асимптоти.



Малюнок 1.

На малюнку 1 функція зображена суцільною лінією, а її асимптота – пунктирною.

Математично обдаровані діти досить часто навчаються в математичних класах, школах, технічних та кібернетичних коледжах де програма з математики досить широка. У загальноосвітніх школах математично обдаровані діти навчаються на факультативних заняттях, заняттях математичних гуртків, індивідуальній роботі під керівництвом учителя. Програми для математично обдарованих дітей у профільних навчальних закладах і форми наведених занять передбачають формування в них поняття розриву функції в точці, класифікацію розривів та дослідження функцій на розриви. За звичай поняття розривності функції в точці дається в науково-методичній літературі як заперечення неперервності функції в точці: якщо функція не є неперервною в точці, то вона називається розривною в цій точці. Формування понять, пов'язаних з розривами функцій, досить складна методична проблеми, розв'язати яку допоможуть сучасні графічні технології, зокрема – технологія AG. Щоб дослідити поведінку функції в точці (характер розриву функції чи її неперервність в точці) потрібно знаходити ліву й праву границі функції в цій точці, про що досить детально описано в [3].

Завдання 6. Підібрати приклади розривних в деякій точці x_0 дробово-раціональних функцій таких, щоб: 1) в точці x_0 функція мала усувний розрив, причому ліві й праві границі функції в цій точці були: а) рівні нулю, б) будь-якому дійсному числу r; 2) в точці x_0 функція мала розрив другого роду у вигляді нескінченого стрибка. Дослідити детально цей випадок.

Розв'язання. Якщо дробово-раціональна функція

$$y(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

має розрив в точці x_0, то многочлен-знаменник в цій точці перетворюється в нуль.

Нехай $x_0 = 1$ знаменника кратності 3. Тоді знаменник повинен мати розклад типу

$$Q(x) = (x-1)^3(x^2+x+1).$$

Для простоти ми беремо приклад, коли знаменник перетворюється в нуль тільки в одній точці. Для того, щоб функція y(x) мала в точці $x_0 = 1$ усувний розрив потрібно, щоб чисельник також мав коренем одиницю причому кратності 3. Тоді чисельник може мати, наприклад, такий вигляд

$$P(x) = (x-1)^3(ax^2+bx+c).$$

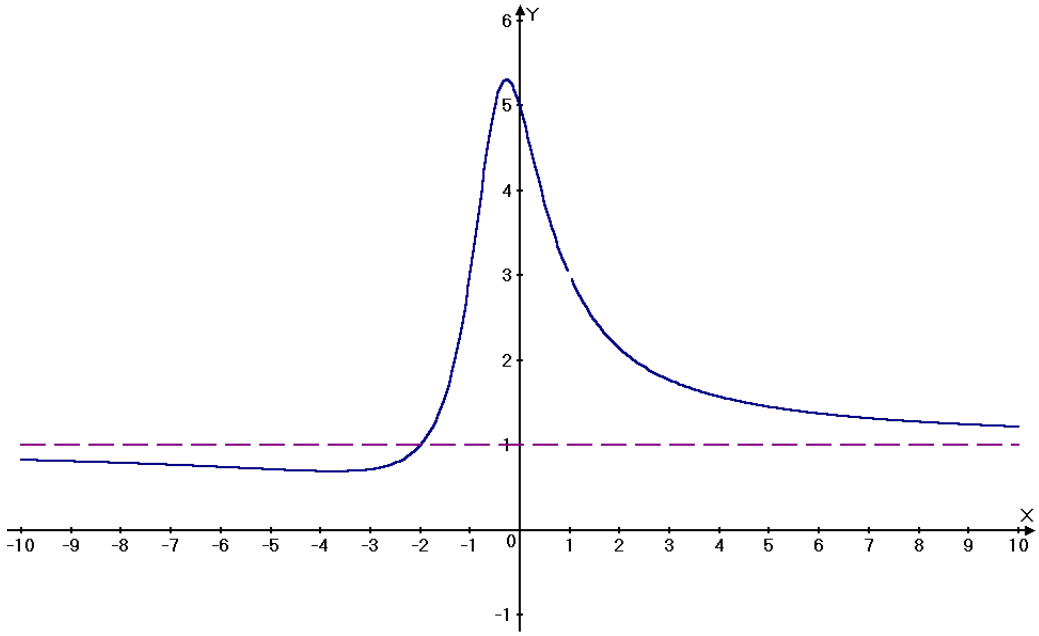
А границя

$$\lim_{x\to 1+} y(x) = \lim_{x\to 1-} y(x) = \lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a+b+c}{3} = r,$$

r – будь-яке дійсне число, наприклад r=3. Тоді $a+b+c=9$. Звідки може бути таке: $a=1$, $b=3$, $c=5$. Тоді $y(x)$ набуде вигляду (після розкриття дужок):

$$y(x) = \frac{x^5 - x^3 - 7x^2 + 12x - 5}{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}.$$

Графік функції зображений на малюнку 2.



Малюнок 2.

Для часткового випадку, коли $r = 0$ повинно виконуватися $a+b+c=0$.

Ситуація r=0 буде, коли кратність кореня $x_0 = 1$ чисельника буде більшою, ніж кратність цього ж кореня в знаменнику, наприклад:

$$Q(x) = (x-1)\ (x^2+x+1),$$

$$P(x) = (x-1)^3(x^2+3x+5).$$

Тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x^2+3x+5)}{x^2+x+1} = \frac{0}{3} = 0.$$

Шукана функція може мати вигляд (після розкриття дужок):

$$y(x) = \frac{x^5 - x^3 - 7x^2 + 12x - 5}{x^3 - 1},$$

а границя $$\lim_{x\to 1} y(x) = 0.$$

Випадок, коли в точці $x=1$ буде розрив другого роду типу нескінченого стрибка можна одержати якщо кратність кореня $x=1$ чисельника буде меншою за кратність цього ж кореня в знаменнику. Наприклад:

$$Q(x) = (x-1)^3(x^2+x+1),$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+3x+5).$$

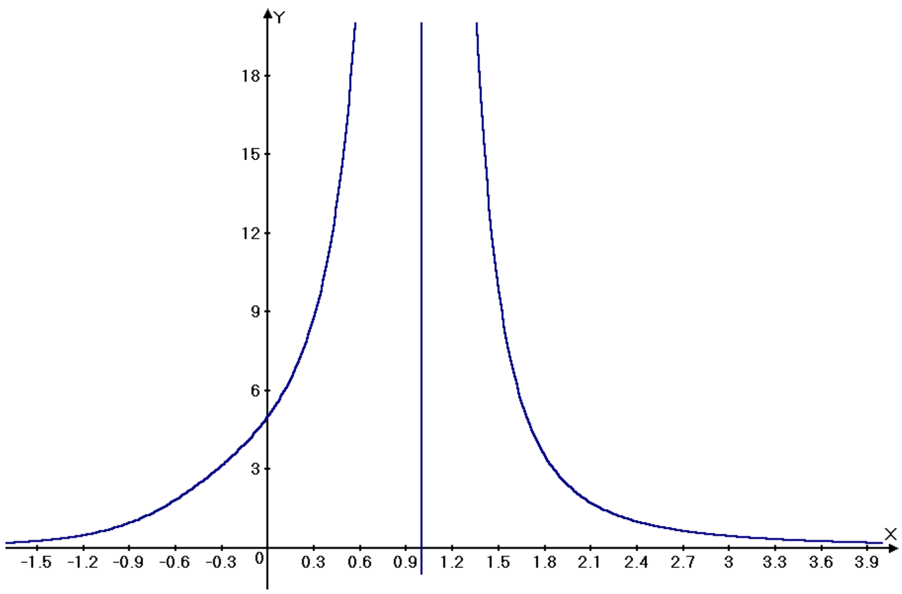
Тоді границя

$$\lim_{x\to 1-} y(x) = \lim_{x\to 1+} y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty.$$

Шуканою функцією може бути така (після розкриття дужок):

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x - 5}{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}.$$

У точці $x_0 = 1$ буде вертикальна асимптота $x = 1$. Відповідна геометрична
картина зображена на малюнку 3.



Малюнок 3.

Якщо, наприклад, взяти

$$P(x) = (x-1)(x^2+3x+5),$$
$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$$

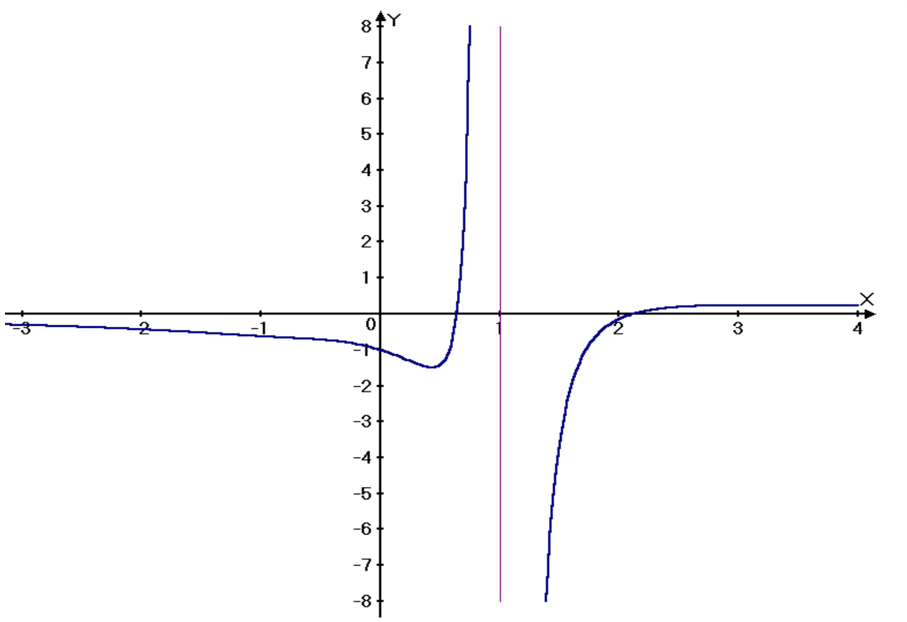
Тоді

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4-2x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1},$$

а границі

$$\lim_{x\to 1-} y(x) = -\infty \; ; \qquad \lim_{x\to 1+} y(x) = \infty$$

Графік наведеної функції зображений на малюнку 4.



Малюнок 4.

Після розгляду різних типів розглянутих вище задач (які можуть бути у різних варіаціях) суб'єкт розв'язування задачі самостійно чи за допомогою вчителя може сформулювати процедуру у вигляді алгоритму, припису алгоритмічного типу, системи евристик дослідження поведінки дробово-раціональної функції в певній точці x_0: неперервна чи розривна і, якщо розривна, то якого типу розрив. Точка неперервності досліджується просто, тому зупинимося на дослідженні функції в точці розриву x_0 .

1. Визначити точку розриву дробово-раціональної функції

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Це буде корінь многочлена $Q(x)$, або, що те саме – дійсний розв'язок рівняння

$$Q(x) = 0.$$

2. На основі теореми Безу представити знаменник у вигляді

$$Q(x) = (x - x_0)Q_1(x).$$

Перевіряємо чи буде x_0 коренем многочлена $Q_1(x)$, якщо так, то повторюємо попередню процедуру з $Q_1(x)$ і отримуємо розклад

$$Q(x)=(x-x_0)^2 Q_2(x)\cdot$$

Процедура закінчиться при деякому k тоді, коли у розкладі

$$Q(x)=(x-x_0)^k Q_k(x)$$

$$Q_k(x_0)\neq 0\cdot$$

У такий спосіб можна визначити кратність кореня x_0.

3. Визначити, чи буде x_0 коренем многочлена $P(x)$? Якщо так, то будуємо аналогічно процедури пункту 2 представлення

$$P(x)=(x-x_0)^s P_s(x)\cdot$$

4. Після спрощення дробово-раціональна функція може мати або вигляд

$$y(x)=\frac{(x-x_0)^i P_s(x)}{Q_k(x)},\ \text{при } s>k,$$

або

$$y(x)=\frac{P_s(x)}{(x-x_0)^j Q_k(x)},\ \text{при } s<k,$$

або

$$y(x)=\frac{P_s(x)}{Q_k(x)},\ \text{при } s=k.$$

5. Знайти ліву й праву границі функції $y(x)$ в точці x_0. При $s>k$ $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=0$.

При $s<k$

$$\lim_{x\to x_0} y(x)=\pm\infty.$$

При $s=k$

$$\lim_{x\to x_0} y(x)=\frac{P_s(x_0)}{Q_k(x_0)}.=r$$

6. Виходячи з результатів пункту 5, охарактеризувати тип розриву та вказати рівняння відповідної вертикальної асимптоти.
7. Побудувати в певній ІКТ-технології графік функції $y(x)$ та графік асимптоти $x=x_0$.

Учителеві корисно аналізувати такі процедури з тим, щоб уяснити якого вони типу: алгоритми, приписи алгоритмічного типу, евристики (з цього приводу див. Л.Н.Ланда [2], Г.О.Балл [1]). Пункт 1 не є алгоритмічним тому, що його не можна здійснити як скінчену кількість визначених операцій: невідомий спосіб і відповідний алгоритм відшукання коренів знаменника. Способами можуть бути для многочленів третього й четвертого порядків формули Кардано (котрі в загальноосвітніх школах не вивчаються), для многочленів вищих порядків раціональні корені можна відшукувати за допомогою дільників вільного члена або наближеними методами. Тому перший пункт скоріше є евристикою, реалізація якої вимагає побудови (чи вибору) відповідних алгоритмів.

Другий і третій пункти можуть бути здійсненими як циклічні алгоритми.

Четвертий пункт можна тлумачити як алгоритм з розгалуженням.

П'ятий пункт (відшукання такої складної границі функції) взагалі не можна виконати у вигляді скінченої кількості операцій, а є когнітивно-логічною процедурою, яку формалізувати практично неможливо.

У шостому пункті вимагається характеристика типу розриву, що на рівні профільних класів, шкіл, ліцеїв, коледжів формалізувати неможливо.

Побудова в середовищі AG-технології графіків функції та її вертикальної асимптоти, рівняння якої уже визначено, є формальною процедурою.

Отже, наведена вище процедура, що складається із семи пунктів, не є алгоритмом, а є приписом алгоритмічного типу, що має лінійну частину, цикли й розгалуження.

У точці x_0 розриву другого роду типу нескінченного стрибка функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ існує вертикальна асимптота $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_0$. Причому можуть бути такі випадки:

А) ліва й права границі функції в точці x_0 – нескінченості одного знаку;

Б) ліва й права границі функції в точці x_0 – нескінченості різних знаків;

В) одна з границь (наприклад, ліва) функції в точці x_0 – скінчене число, а друга – нескінченість певного знаку.

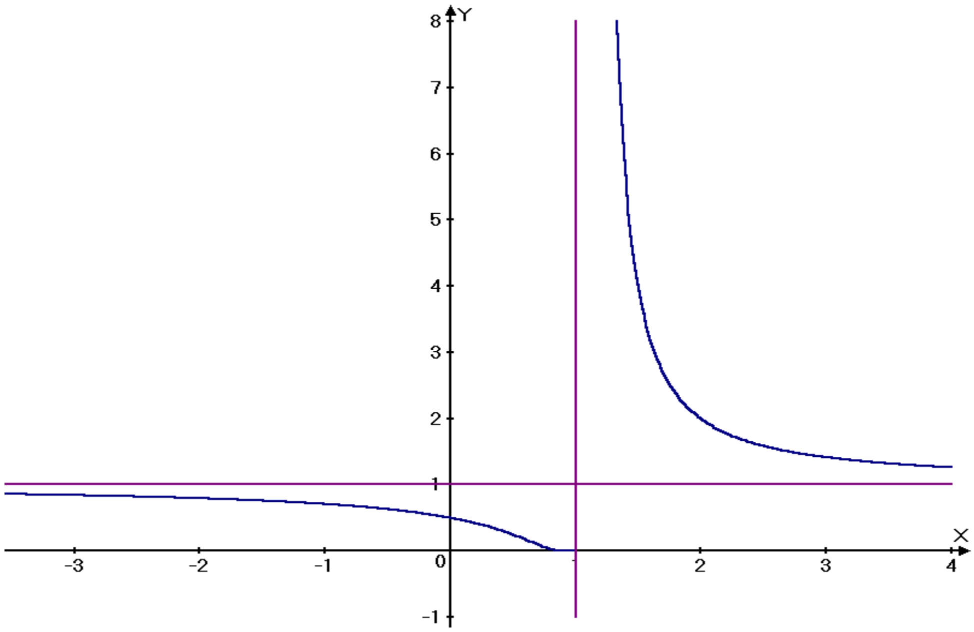
Задачі на ситуації А) і Б) наведені вище. Можна формулювати задачі на різні комбінації ситуацій А), Б), В). Задачі ситуації В) можуть бути такого виду.

Задача 7. Навести приклад показникової функції (показником є дробово-раціональна функція), яка у точці $x_0 = 1$ границю з одного боку мала б скінченим числом, а з іншого – нескінченність певного знаку.

Розв'язування. Прикладом такої функції може бути функція

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 2^{\frac{1}{x-1}}.$$

В точці $x_0=1$ функція невизначена і тому має розрив. Учням чи слухачам коледжів навіть з доброю математичною підготовкою за звичай непросто знайти ліву й праву границю такої функції. Тому спочатку краще побудувати графічну модель даної задачі в середовищі певної ІКТ. Така модель буде відігравати роль у побудові алгоритму розв'язування, вона даватиме наочне уявлення про узагальнений план розв'язку задачі. Відповідну побудову ми виконаємо в середовищі AG-технології (малюнок 5).



Малюнок 5.

З малюнка 5 видно, що ліва границя скінчена, а права – рівна $+\infty$. Тепер ці гіпотези потрібно підтвердити аналітичним доведенням.

$$\lim_{x\to 1-} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{-\infty} \to \frac{1}{2^{\infty}} \to \frac{1}{\infty}) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1+} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{\infty}) = \infty \cdot$$

Асимптотою буде пряма лінія

$$x=1.$$

В AG-технології побудуємо цю асимптоту (малюнок 5).

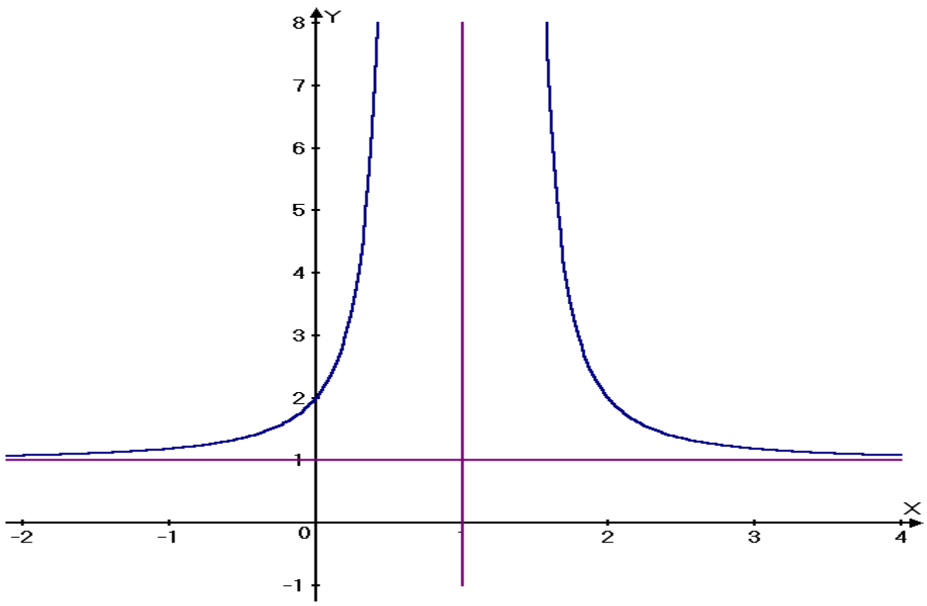
Задача 8. Дослідити поведінку функції

$$y = 3^{\frac{1}{(x-1)^2}}$$

в точці $x=1$.

Розв'язування. Спочатку побудуємо графік функції (опору) в AG-технології (малюнок 5).

З графіка видно, що



Малюнок 6.

$$\lim_{x\to 1-} y(x) = \lim_{x\to 1+} y(x) = \infty,$$

що доводиться логічними роздумами. Вертикальною асимптотою буде $x=1$.

Можна ставити учням чи студентам задачі на наведення прикладів функцій, які мають розриви другого роду в певній точці, чи двох, трьох точках, причому ліві й праві границі можуть бути різного характеру, відшукати вертикальні асимптоти тощо. Відшукання розв'язків таких задач можна розпочати з графіків відповідних функцій, тобто, з побудови опор, які значно спростять пошуково-дослідницькі дії для суб'єкта розв'язування.

Зауважимо, що загалом процес розв'язування задачі як процес створення-перетворення-розв'язування послідовності її моделей, тобто як процес переходу від однієї моделі до іншої (наступної) є не алгоритмічною, а, значить, не рутинною задачею (з приводу рутинної й нерутинної задачі див. Г.О.Балл [1]) й тому, як показано вище, творчим процесом для суб'єкта розв'язування задачі.

Стаття розрахована на вчителів, викладачів і студентів профільних шкіл, коледжів, ліцеїв, педагогічних навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Балл Г.А. Теория учебных задач. Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990. – С. 103.

2. Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. Под общей ред. Б.В.Гнеденко и Б.В.Бирюкова. – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.

3. Шкіль М.І., Слепкань З.І., Дубенчук О.С. Алгебра і початки аналізу – к.: Зодіак, 1996. – 608 с.