УДК 681.3.07

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЖОРДЖА РЕНИ

С.Т. Кузнецов

Представлено просте доведення однієї не дуже тривіальної теореми.

Presented by the simple proof of a theorem is not trivial.

Джордж Рени (George N. Raney) в 1959 году сформулировал и в 1960 году опубликовал следующую теорему: «Если $<x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m>$ – любая последовательность целых чисел, сумма которых равна +1, то ровно у одного из её циклических сдвигов все частичные суммы есть натуральные числа».

Приведём одно из доказательств этой теоремы.

Нахождение частичных сумм заключается в пошаговом вычислении по формуле $s_i=s_{i-1}+x_i$. На первом шаге (i=1) $s_{i-1}=s_m=0$. После m-ного (заключительного) шага суммирования $s_m=+1$. Если среди частичных сумм есть не натуральные, то находим такое k, что:

а) s_{k-1} не больше любой из остальных m-1 частичных сумм;

б) каждая из $s_k,\ s_{k+1},\ \ldots,\ s_m$ больше, чем s_{k-1}.

Очевидно, что такой выбор можно сделать единственным способом. Теперь суммирование начнём с x_k, приняв k-1-ую сумму равной нулю и тем самым увеличив её на $|s_{k-1}|$. На эту же величину увеличится каждая из s_k, $s_{k+1},\ \ldots,\ s_m$. Они, разумеется, будут натуральными. При этом s_m станет равной $|s_{k-1}|+1$. Далее на эту же величину возрастает каждое из чисел $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{k-1}$, и процесс суммирования закончится. Каждое из новых чисел $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{k-1}$, будет натуральным ($s_{k-1}$ при этом будет равно +1).

Проиллюстрируем изложенное выше на примере:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\boxed{11}$	12	13
x	-1	+3	-5	0	+6	-1	-5	+4	-2	-2	+2	-1	+3
s													0
	-1	+2	-3	$\boxed{-3}$	$\boxed{+3}$	+2	$\boxed{-3}$	+1	-1	$\boxed{-3}$	-1	-2	+1
s										0	+2	+1	+4
	+3	+6	+1	+1	+7	+6	+1	+5	+3	+1			

Для нового суммирования выбрано k=11, $|s_{k-1}|$=3.