

УДК 517.9

## СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

**І.Г. Ключник**

Одержані умови, при яких розв'язками системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу і точкою звороту є розв'язки системи диференціальних рівнянь.

The obtained conditions under which solutions of the system of differential equations with small parameter on the part of derived from the linear deviation of the argument and with turning point is the solution of differential equations.

Основними методами побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точкою звороту в яких використовуються функції Ейрі є методи Р. Лангера [1, 2], В. Вазова [3, 4], А.А. Дородніцина [5], Цваана-Федорюка [6], регуляризації [7], зшивання і узгодження асимптотик [8-10]. За допомогою функцій сплеска в [11] побудовано асимптотичний розв'язок сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку з точкою звороту, а в [12] розроблений асимптотичний метод інтегрування системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами з точкою звороту в елементарних функціях.

Вперше в [13] розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту, для якої запропоновано асимптотичний метод інтегрування. А в [14] для розглядуваної системи доведено існування і нескінченну диференційованість матричних функцій, які мають асимптотичні розвинення формальних рядів одержаних запропонованим асимптотичним методом.

Вперше розглядається система диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній з лінійним відхиленням аргументу з точкою звороту. Для такої системи одержані умови при яких розв'язками розглядуваної системи з відхиленням аргументу є розв'язки системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній, в якій одна із матриць подібна матриці Ейрі  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ , а інші матриці мають асимптотичні розвинення на компактi  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  з коефіцієнтами голоморфними при  $|x| \leq x_0$ .

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду :

$$y_1' = A_1(x)y_1(x, \varepsilon) + A_2(x)y_2(x, \varepsilon) + A_3(x)y_1(x(1 - \varepsilon^2\Delta), \varepsilon) + A_4(x)y_2(x(1 - \varepsilon^2\Delta), \varepsilon), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon y_2' = & (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))y_2(x, \varepsilon) + \varepsilon B_2(x)y_1(x, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon B_3(x)y_1(x(1 - \varepsilon^2 \Delta), \varepsilon) + (B_4(x) + \varepsilon B_5(x))y_2(x(1 - \varepsilon^2 \Delta), \varepsilon), \end{aligned}$$

де  $y_1 \in R^p$ ,  $y_2 \in R^2$ ;  $A_i(x)$ ,  $B_j(x)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $j = \overline{0,5}$  – голоморфні матриці за дійсною змінною  $x$  при  $|x| \leq x_0$ ;  $\varepsilon$  – малий дійсний параметр;  $\Delta$  – дійсна додатна стала.

Припустимо виконання умов:

- 1) визначник матриці  $\det C_{220}(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ , де матриця  $C_{220}(x)$  визначається рівністю  $C_{220}(x) = B_0(x) + B_4(x)$ ;
- 2)  $\det C_{220}(0) = 0$  і  $C_{220}(0)$  подібна жордановій формі  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- 3)  $\frac{d}{dx}(\det C_{220}(x))|_{x=0} \neq 0$ .

Вірною є теорема.

**Теорема.** Нехай матриці  $A_i(x)$ ,  $B_j(x)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $j = \overline{0,5}$  голоморфні матриці в області  $|x| \leq x_0$ ,  $x \in R$ , і можна вказати  $\varepsilon_0$  таке, що виконуються нерівності

$$\|A_i(x)\|_0 \leq \alpha_i, \|B_j(x)\|_0 \leq \beta_j, i = \overline{1,4}, j = \overline{0,5}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_0(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta x_0 e^{\varepsilon_0(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2))\Delta x_0 + 1} < 1, \quad (3)$$

а також справедливі умови 1-3. Тоді при  $|x| \leq x_0$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ,  $x \in R$  кожен розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду

$$y_1' = C_{11}(x, \varepsilon)y_1(x, \varepsilon) + C_{12}(x, \varepsilon)y_2(x, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\varepsilon y_2' = C_{21}(x, \varepsilon)y_1(x, \varepsilon) + C_{22}(x, \varepsilon)y_2(x, \varepsilon)$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь із малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу (1). Знайдуться матриці  $C_{ml}(x, \varepsilon)$ ,  $m, l = \overline{1,2}$ , такі, що мають місце розвинення

$$C_{ml}(x, \varepsilon) = C_{ml0}(x) + \varepsilon C_{ml1}(x) + \dots + \varepsilon^k C_{mlk}(x) + \varepsilon^{k+1} C_{ml,k+1}(x, \varepsilon). \quad (5)$$

Матриці  $C_{ml0}(x)$ ,  $C_{ml,k+1}(x, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{0,k}$ ,  $m, l = \overline{1,2}$  голоморфні при  $|x| \leq x_0$  і матриці  $C_{ml,k+1}(x, \varepsilon)$  мають неперервну похідну за змінною  $\varepsilon$  при  $|x| \leq x_0$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ .

Кожен ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_{mln}(x)$ ,  $m, l = \overline{1,2}$  є рівномірним при  $|x| \leq x_0$  асимптотичним розвиненням при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  відповідної матриці  $C_{ml}(x, \varepsilon)$ ,  $m, l = \overline{1,2}$  і мають місце нерівності

$$\left\| C_{ml}(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^k \varepsilon^n C_{mln}(x) \right\| \leq M |\varepsilon|^{k+1}, |x| \leq x_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, m, l = \overline{1,2}. \quad (6)$$

*Доведення.* Систему (1) перепишемо у вигляді

$$K(\varepsilon)y' = (F_0(x) + \varepsilon F_1(x))y(x, \varepsilon) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))y(x(1 - \varepsilon^2 \Delta), \varepsilon), \quad (7)$$

де  $y \in R^{p+2}$  і має вигляд

$$y(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x, \varepsilon) \\ y_2(x, \varepsilon) \end{pmatrix};$$

блочні матриці  $K(\varepsilon)$ ,  $F_i(x)$ ,  $G_i(x)$ ,  $i = \overline{0,1}$  мають вигляд

$$K(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 \end{pmatrix}, F_0(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ 0 & B_0(x) \end{pmatrix}, F_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2(x) & B_4(x) \end{pmatrix},$$

$$G_0(x) = \begin{pmatrix} A_3(x) & A_4(x) \\ 0 & B_4(x) \end{pmatrix}, G_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_3(x) & B_5(x) \end{pmatrix};$$

$I_p$  – одинична матриця  $p$ -го порядку.

При  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  матриця  $\Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right)$ , яка визначається рівністю

$$\Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) = I_{p+2} + \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^x C(s, \varepsilon) ds + \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \int_0^x C(s, \varepsilon) K_1(\varepsilon) \int_0^s C(s_1, \varepsilon) ds_1 ds + \dots +$$

$$+ \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^n} \int_0^x C(s, \varepsilon) K_1(\varepsilon) \int_0^s C(s_1, \varepsilon) K_1(\varepsilon) \dots K_1(\varepsilon) \int_0^{s_{n-2}} C(s_{n-1}, \varepsilon) ds_{n-1} \dots ds_1 ds + \dots \quad (8)$$

є матрицантом системи диференціальних рівнянь

$$K(\varepsilon)y' = C(x, \varepsilon)y(x, \varepsilon), \quad (9)$$

де блочні матриці  $C(x, \varepsilon)$ ,  $K_1(\varepsilon)$  мають вигляд

$$C(x, \varepsilon) = (C_{ml}(x, \varepsilon)), K_1(\varepsilon) = \{\varepsilon I_p, I_2\}, m, l = \overline{1,2},$$

причому матриця  $C(x, \varepsilon)$  визначена при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ . Зауважимо, що ряд (8) збігається рівномірно по  $x$  і  $\varepsilon$  при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ .

Загальний розв'язок рівняння (9) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  визначається за формулою

$$y(x, \varepsilon) = \Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0, \quad (10)$$

де  $y_0 \in R^{p+2}$  і не залежить від  $x$ .

Функція (10) буде задовольняти рівнянню (7) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ , коли виконується рівність:

$$K(\varepsilon) \frac{dy}{dx} = C(x, \varepsilon) \Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0 = (F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) \Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0 +$$

$$+ (G_0(x) + \varepsilon G_1(x)) \Omega_0^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0. \quad (11)$$

З (11) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  отримаємо рівність

$$C(x, \varepsilon) \Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) = (F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) \Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) +$$

$$+ (G_0(x) + \varepsilon G_1(x)) \Omega_0^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right). \quad (12)$$

З властивості матриці  $\Omega_0^x \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right)$  випливає, що рівність (12) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  виконується лише тоді, коли

$$C(x, \varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x)) \Omega_0^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)C(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right). \quad (13)$$

Таким чином, якщо всі розв'язки системи рівнянь (9) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  є розв'язками системи рівнянь (7), то на вказаній множині матриця  $C(x, \varepsilon)$  задовольняє рівнянню (13).

Очевидне і зворотне. Якщо матриця  $C(x, \varepsilon)$  неперервна, при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  задовольняє (13), то вектор-функція (10) є розв'язком системи рівнянь (7) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ .

За допомогою заміни змінних в рівнянні (13) за формулою

$$C(x, \varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon) \quad (14)$$

одержимо рівняння:

$$(G_0(x) + \varepsilon G_1(x)) \left( Z(x, \varepsilon) - \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon} (F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon) \right) \right) = 0. \quad (15)$$

Згідно рівняння (15) виберемо  $Z(x, \varepsilon)$  наступним чином:

$$Z(x, \varepsilon) = \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon} (F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon) \right). \quad (16)$$

Визначимо оператор

$$SZ(x, \varepsilon) = \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon} (F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon) \right) \quad (17)$$

у просторі  $C(m, J_0)$  матриць  $Z(x, \varepsilon)$  заданих і неперервних за двома змінними  $x$  і  $\varepsilon$  на множині  $J_0 = \{(x, \varepsilon) \mid |x| \leq x_0, \delta \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$

і такі, що

$$\|Z\|_0 = \max_{(x, \varepsilon) \in J_0} \|Z(x, \varepsilon)\| \leq m,$$

де  $\delta$  – додатне число таке, що  $\delta < \varepsilon_0$ .

Використовуючи вигляд блочних матриць  $F_i(x)$ ,  $G_i(x)$ ,  $i = \overline{0,1}$  знайдемо норму таких матриць

$$\|F_0(x)\|_0 \leq \alpha_5, \|F_1(x)\|_0 \leq \beta_1 + \beta_2, \|G_0(x)\|_0 \leq \alpha_6, \|G_1(x)\|_0 \leq \beta_3 + \beta_5 \quad (18)$$

де

$$\alpha_5 = \max(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_0), \alpha_6 = \max(\alpha_3 + \alpha_4, \beta_4).$$

Матриця  $SZ(x, \varepsilon)$  неперервна на множині  $J_0$ . Згідно нерівностей (2), (3), (18) вірною є оцінка

$$\begin{aligned} \|SZ\|_0 &\leq \sup_{(x, \varepsilon) \in J_0} \left| \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{\|K_1(\varepsilon)\|}{|\varepsilon|} (\|F_0(x) + \varepsilon F_1(x)\| + \|G_0(x) + \varepsilon G_1(x)\|m) \right) \right| \leq \\ &\leq e^{\varepsilon_0(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)\Delta x_0}. \end{aligned}$$

Тоді, якщо виконується нерівність

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0} \leq m, \tag{19}$$

то оператор  $S$  переводить простір  $C(m, J_0)$  у себе.

Оцінимо різницю  $SZ_1(x, \varepsilon) - SZ_2(x, \varepsilon)$  для матриць  $Z_i(x, \varepsilon) \in C(m, J_0)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .  
Позначимо

$$P_i(x, \varepsilon) = \frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z_i(x, \varepsilon))}{\varepsilon}, \quad i = \overline{1, 2} \quad \text{і розглянемо}$$

різницю

$$\Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)}(P_1(x, \varepsilon)) - \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)}(P_2(x, \varepsilon)).$$

Маємо

$$\begin{aligned} & \left\| \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_1(s, \varepsilon) ds - \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_2(s, \varepsilon) ds \right\| \leq \left\| \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_1(s, \varepsilon) ds - P_2(s, \varepsilon) ds \right\| \leq (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)\varepsilon_0\Delta x_0) \|Z_1 - Z_2\|_0; \\ & \left\| \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_1(s, \varepsilon) \int_x^s P_1(s_1, \varepsilon) ds_1 ds - \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_2(s, \varepsilon) \int_x^s P_2(s_1, \varepsilon) ds_1 ds \right\| \leq \\ & \leq \frac{(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))}{|\varepsilon|} \left( \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \int_x^s \|P_1(s_1, \varepsilon)\| ds_1 ds - \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \|P_1(s_1, \varepsilon)\| \int_x^s ds_1 ds \right) \|Z_1 - Z_2\|_0 \leq \\ & \leq (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)\varepsilon_0^2\Delta^2 x_0^2 \|Z_1 - Z_2\|_0; \\ & \left\| \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_1(s, \varepsilon) \int_x^s P_1(s_1, \varepsilon) \dots \int_x^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1}, \varepsilon) ds_{n-1} \dots ds_1 ds - \right. \\ & \left. - \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} P_2(s, \varepsilon) \int_x^s P_2(s_1, \varepsilon) \dots \int_x^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1}, \varepsilon) ds_{n-1} \dots ds_1 ds \right\| \leq \\ & \leq \frac{(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))n(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^{n-1}}{|\varepsilon|^n} \times \\ & \quad \times \left\| \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \int_x^s \dots \int_x^{s_{n-2}} ds_{n-1} \dots ds_1 ds \right\| \|Z_1 - Z_2\|_0 \leq \\ & \leq \frac{(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta^n |\varepsilon|^n |x|^n (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^{n-1}}{(n-1)!} \times \\ & \quad \times \|Z_1 - Z_2\|_0 \leq (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta x_0 \varepsilon_0 \times \\ & \quad \times \frac{(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^{n-1} \Delta^{n-1} x_0^{n-1} \varepsilon_0^{n-1}}{(n-1)!} \|Z_1 - Z_2\|_0. \end{aligned}$$

Тому при  $(x, \varepsilon) \in J_0$  одержимо

$$\begin{aligned} & \|SZ_1(x, \varepsilon) - SZ_2(x, \varepsilon)\| = \left\| \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)}(P_1(x, \varepsilon)) - \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)}(P_2(x, \varepsilon)) \right\| \leq \\ & \leq (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta x_0 \varepsilon_0 e^{(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\Delta^n |\varepsilon|^n |x|^n (\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0 \varepsilon_0} \|Z_1 - Z_2\|_0. \end{aligned}$$

При виконанні нерівності

$$(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta x_0 \varepsilon_0 e^{(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0 \varepsilon_0} < 1, \tag{20}$$

оператор  $S$  є оператором стику у просторі  $C(m, J_0)$ .

Якщо виконуються нерівності (2), (3) то для  $m$ , що задовольняють оцінки

$$m < \frac{1}{\Delta x_0 (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) \varepsilon_0}$$

справедлива нерівність (20). Рівність

$$e^{\varepsilon_0 (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2)) + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m} \Delta x_0 = m$$

має два розв'язки  $m_1$  і  $m_2$  такі, що

$$\Delta x_0 (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) \varepsilon_0 m_1 < 1 < \Delta x_0 (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) \varepsilon_0 m_2.$$

Звідси випливає, що для

$$m_1 \leq m < \frac{1}{\Delta x_0 (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) \varepsilon_0} \quad (21)$$

будуть виконуватися одночасно обидві нерівності (19), (20).

Отже, при виконанні нерівностей (2), (3), для значень  $m$ , що задовольняють оцінки (21) оператор  $S$  заданий рівністю (17) відображає  $C(m, J_0)$  у себе і є оператором стику.

Таким чином, у просторі  $C(m, J_0)$  оператор  $S$  має єдину нерухому точку, яка і є єдиним розв'язком рівняння (16). А отже рівняння (13) має єдиний неперервний розв'язок на множині  $J_0$ . В силу довільності числа  $\delta$  рівняння (13) має єдиний неперервний розв'язок для  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ .

Згідно нерівностей (2) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  маємо оцінку норми

$$\|Z(x, \varepsilon)\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^n \Delta^n x_0^n (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2)) + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m^n}{n!} \quad (22)$$

Перейшовши в (22) до границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а також з вигляду матриці  $Z(x, \varepsilon)$  і оцінки на множині  $J_0$  для норми  $\|Z(x, \varepsilon)\|$ , які задані відповідно формулами (16), (22) маємо, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z(x, \varepsilon) = I, \quad |x| \leq x_0,$$

де  $I$  – одинична матриця відповідного порядку.

Довизначимо матрицю  $Z(x, \varepsilon)$  при  $|x| \leq x_0$  в точці  $\varepsilon = 0$  до неперервної за змінними  $x$  і  $\varepsilon$  на множині  $J = \{(x, \varepsilon) \mid |x| \leq x_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$ ,

поклавши

$$Z(x, 0) = I.$$

Тоді перейшовши до границі в (14) знайдемо, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(x, \varepsilon) = C_0(x), \quad |x| \leq x_0.$$

Тепер довизначимо  $C(x, \varepsilon)$  при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon = 0$  до неперервної за змінними  $x$  і  $\varepsilon$  на множині  $J$ , поклавши

$$C(x, 0) = C_0(x) = F_0(x) + G_0(x).$$

Користуючись (8) і записавши при  $\varepsilon \neq 0$  явний вигляд матрицанта

$$\Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon))}{\varepsilon} \right) \tag{23}$$

приведемо його до іншого вигляду. Для цього у першому інтегралі, який входить в матрицант (23), введемо заміну змінних за формулою

$$\tau = \frac{x - \varepsilon}{\varepsilon^2 \Delta},$$

одержимо

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} K_1(\varepsilon)(F_0(s) + \varepsilon F_1(s) + (G_0(s) + \varepsilon G_1(s))Z(s, \varepsilon)) ds = \\ &= -\varepsilon \Delta K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)) d\tau \end{aligned} \tag{24}$$

Припустимо виконання наступної рівності для  $n$ -кратного інтегралу

$$\begin{aligned} &\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^n} \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} (F_0(s) + \varepsilon F_1(s) + (G_0(s) + \varepsilon G_1(s))Z(s, \varepsilon)) K_1(\varepsilon) \int_x^s (F_0(s_1) + \varepsilon F_1(s_1) + \\ &+ (G_0(s_1) + \varepsilon G_1(s_1))Z(s_1, \varepsilon)) \dots K_1(\varepsilon) \int_x^{s_{n-2}} (F_0(s_{n-1}) + \varepsilon F_1(s_{n-1}) + (G_0(s_{n-1}) + \varepsilon G_1(s_{n-1}))Z(s_{n-1}, \varepsilon)) ds_{n-1} ds_{n-2} \dots ds_1 ds = \\ &= (-1)^n \varepsilon^n \Delta^n K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)) K_1(\varepsilon) \cdot \\ &\cdot \int_0^\tau (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1, \varepsilon)) \dots K_1(\varepsilon) \cdot \\ &\cdot \int_0^\tau (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}, \varepsilon)) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 d\tau, \end{aligned} \tag{25}$$

де змінні  $\tau_i, i = \overline{1, n-1}$  задаються рівністю

$$\tau_i = \frac{x - s_i}{\varepsilon^2 \Delta}. \tag{26}$$

Тоді  $(n+1)$ -інтеграл вигляду (25) прийме вигляд

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} \int_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} (F_0(s) + \varepsilon F_1(s) + (G_0(s) + \varepsilon G_1(s))Z(s, \varepsilon)) K_1(\varepsilon) \int_x^s (F_0(s_1) + \\ &+ \varepsilon F_1(s_1) + (G_0(s_1) + \varepsilon G_1(s_1))Z(s_1, \varepsilon)) \dots K_1(\varepsilon) \int_x^{s_{n-1}} (F_0(s_n) + \varepsilon F_1(s_n) + (G_0(s_n) + \varepsilon G_1(s_n))Z(s_n, \varepsilon)) ds_n \dots ds_1 ds = \\ &= \varepsilon^n (-1)^n \Delta^n K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)) \dots K_1(\varepsilon) \cdot \\ &\cdot \int_0^{\tau_{n-2}} (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}))Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_{n-1}, \varepsilon)) \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \int_x^{s_{n-1}} (F_0(s_n) + \varepsilon F_1(s_n) + (G_0(s_n) + \varepsilon G_1(s_n))) Z(s_n, \varepsilon) ds_n d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 d\tau. \tag{27}$$

Ввівши в (27) заміну за формулою

$$\tau_n = \frac{x - s_n}{\varepsilon^2 \Delta}$$

і скориставшись (25), (26) отримаємо, що  $(n+1)$  інтеграл  $T_{n+1}$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= (-1)^{n+1} \varepsilon^{n+1} \Delta^{n+1} K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))) \\ &\cdot Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon) \cdot K_1(\varepsilon) \int_0^{\tau_{n-1}} (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_n) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_n) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_n) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_n))) \\ &\cdot Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_n, \varepsilon) d\tau_n d\tau_{n-1} \dots d\tau. \end{aligned} \tag{28}$$

Із співвідношень (24), (25), (28) і методу математичної індукції випливає справедливість (25) для  $n \in N$ .

Із (25) і вигляду матрицантів (23) і (8) отримаємо, що на множині  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  виконується рівність

$$\begin{aligned} \Omega_x^{x(1-\varepsilon^2\Delta)} \left( \frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))) Z(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) &= \Omega_0^x (-\Delta \varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \\ &+ \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)). \end{aligned} \tag{29}$$

Нерівність матриць  $A_i(x)$ ,  $B_j(x)$ ,  $Z(x, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $j = \overline{0,5}$  на множині  $J$  і рівність (29) дають можливість матрицант правої частини (29) довізначити в точці  $\varepsilon = 0$ ,  $|x| \leq x_0$ , поклавши його рівному одиничній матриці. Тоді враховуючи довізначеність  $Z(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  і рівність (16) одержимо, що на множині  $J$  виконується рівність

$$\begin{aligned} Z(x, \varepsilon) &= \Omega_0^x (-\Delta \varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \\ &+ (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)). \end{aligned} \tag{30}$$

Позначимо через  $F(x, \varepsilon, Z)$  матрицю вигляду

$$\begin{aligned} F(x, \varepsilon, Z) &= Z(x, \varepsilon) - \Omega_0^x (-\Delta \varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \\ &+ (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)), \end{aligned} \tag{31}$$

яка визначена на множині  $J$ .

Згідно (30), (31) неперервна на множині  $J$  матриця  $Z(x, \varepsilon)$  задовольняє рівняння

$$F(x, \varepsilon, Z) = 0 \tag{32}$$

Із (30) знайдемо частину похідну матриці  $F(x, \varepsilon, Z)$  за змінною  $Z$  вигляду

$$F'_Z(x, \varepsilon, Z) = I + \Delta \varepsilon K_1(\varepsilon) \int_0^x (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) d\tau -$$



$$\begin{aligned}
 & -\Delta^2 \varepsilon^2 K_1(\varepsilon) \int_0^x (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) \int_0^\tau K_1(\varepsilon) (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \\
 & + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1, \varepsilon) d\tau d\tau_1 - \\
 & - \Delta^2 \varepsilon^2 K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) \times \\
 & \times Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)) K_1(\varepsilon) \int_0^\tau (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1)) d\tau d\tau_1 + O((\Delta \varepsilon)^3), \tag{33}
 \end{aligned}$$

де  $O((\Delta \varepsilon)^3)$  – величина порядку малості  $(\Delta \varepsilon)^3$ .

Оцінивши норми елементів членів ряду (33), отримаємо мажоранту для ряду (33), сума якого має вигляд

$$1 + \Delta \varepsilon_0 (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) x_0 e^{\Delta \varepsilon_0 x_0 (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m)},$$

що доводить рівномірну збіжність ряду (33) на множині  $J$ . Використовуючи явний вигляд матриці  $F(x, \varepsilon, Z)$ , яка задана рівністю (31) знайдемо частинну похідну  $F'_\varepsilon(x, \varepsilon, Z)$  за змінною  $\varepsilon$  вигляду

$$\begin{aligned}
 F'_\varepsilon(x, \varepsilon, Z) = & \Delta K'_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \\
 & + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) d\tau + \Delta \varepsilon K_1(\varepsilon) \int_0^x (\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau) + \tilde{G}(x, \varepsilon, \tau) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) d\tau - \\
 & - \Delta^2 (\varepsilon K'_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) \times \\
 & \times Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) K_1(\varepsilon) \int_0^\tau (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \\
 & + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) d\tau d\tau_1 + \varepsilon^2 K_1(\varepsilon) \int_0^x (\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau) + \tilde{G}(x, \varepsilon, \tau) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) \times \\
 & \times K_1(\varepsilon) \int_0^\tau (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) d\tau d\tau_1 + \\
 & + \varepsilon K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) \times \\
 & \times K'_1(\varepsilon) \int_0^\tau (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1)) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) d\tau d\tau_1 + \\
 & + \varepsilon^2 K_1(\varepsilon) \int_0^x (F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau)) \times \\
 & \times Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) K_1(\varepsilon) \int_0^\tau (\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau_1) + \tilde{G}(x, \varepsilon, \tau_1) Z(x - \varepsilon^2 \Delta \tau_1) d\tau d\tau_1) + \dots, \tag{34}
 \end{aligned}$$

де

$$\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau) = -2\varepsilon \Delta \tau \frac{dF_0(t)}{dt} \Big|_{t=x-\varepsilon^2 \Delta \tau} + F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) - 2\varepsilon^2 \Delta \tau \frac{dF_1(t)}{dt} \Big|_{t=x-\varepsilon^2 \Delta \tau},$$

$$\tilde{G}(x, \varepsilon, \tau) = -2\varepsilon\Delta\tau \frac{dG_0(t)}{dt} \Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau} + G_1(x - \varepsilon^2\Delta\tau) - 2\varepsilon^2\Delta\tau \frac{dG_1(t)}{dt} \Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}.$$

З вигляду матриці  $K_1(\varepsilon)$  отримаємо оцінки норм наступних матриць:

$$\|K_1'(\varepsilon)\| = \max(2|\varepsilon|, 1), \quad \|\varepsilon K_1(\varepsilon)\| = |\varepsilon| \max(|\varepsilon|, 1) = |\varepsilon|. \tag{35}$$

В результаті оцінки членів ряду (34), з врахуванням (35), отримаємо мажоранту для ряду (34) вигляду

$$(\alpha_7(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)))m + \varepsilon_0(\tilde{F} + \tilde{G}m)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^{n+1} \Delta_0^{n+1} \varepsilon_0^n (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)))m^n}{(n+1)!},$$

де  $\alpha_7 = \max(2\varepsilon_0, 1)$ ,  $\tilde{F} = \sup_{\tau \in [0; x], (x, \varepsilon) \in J} \|\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau)\|$ ,  $\tilde{G} = \sup_{\tau \in [0; x], (x, \varepsilon) \in J} \|\tilde{G}(x, \varepsilon, \tau)\|$ .

З (33) і малості  $\varepsilon$  випливає, що при  $(x, \varepsilon) \in J$  визначник  $\det F'_Z(x, \varepsilon, Z) \neq 0$ . Тоді зі збіжності рядів (33), (34) і (32) випливає існування неперервної похідної  $Z'_\varepsilon(x, \varepsilon)$  за змінною  $\varepsilon$  матриці  $Z(x, \varepsilon)$  на множині  $J$ . Отже, з рівності (14) випливає існування неперервної частинної похідної  $C'_\varepsilon(x, \varepsilon)$  за змінною  $\varepsilon$  матриці  $C(x, \varepsilon)$ .

Розглянемо при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  різницю

$$C_1(x, \varepsilon) = \frac{C(x, \varepsilon) - C_0(x)}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Враховуючи, що  $C(x, \varepsilon)$  диференційована за змінною  $\varepsilon$  на множині  $J$  і  $C(x, 0) = C_0(x)$ , перетворимо різницю матриць

$$C(x, \varepsilon) - C_0(x) = \varepsilon \int_0^1 C'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon) d\theta, \quad (x, \varepsilon) \in J. \tag{37}$$

Підставляючи (37) в (36) при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$  вигляд матриці

$$C_1(x, \varepsilon) = \int_0^1 C'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon) d\theta. \tag{38}$$

Довизначимо  $C_1(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$ . Для цього використовуються неперервність за змінною  $\varepsilon$  похідної  $C'_\varepsilon(x, \varepsilon)$  при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  і враховуючи граничний перехід від інтеграла залежного від параметру, і з рівності (38) отримаємо

$$C_1(x, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 C'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon) d\theta = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon) d\theta = \int_0^1 C'_\varepsilon(x, 0) d\theta = C'_\varepsilon(x, 0). \tag{39}$$

З рівностей (38), (39) випливає, що для  $(x, \varepsilon) \in J$  матриця  $C_1(x, \varepsilon)$  має вигляд (38).

З (36)-(39) випливає можливість представлення при  $(x, \varepsilon) \in J$  матриці  $C(x, \varepsilon)$  у вигляді

$$C(x, \varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x, \varepsilon), \tag{40}$$

де матриця  $C_1(x, \varepsilon)$  задається рівністю (38).

При виводі вигляду (12) для матриці  $C(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \neq 0$ , розв'язок диференціального рівняння (9) брався при  $\varepsilon \neq 0$ , тобто саме рівняння (9)

розглядається при  $|x| \leq x_0$  і  $\varepsilon \neq 0$ . В силу того, що матриця  $C(x, \varepsilon)$  довизначена при  $\varepsilon = 0$  і праві частини диференціального рівняння (7) і диференціального рівняння (9) співпадають при  $\varepsilon = 0$ , то можна вважати, що всі розв'язки диференціального рівняння (9) при  $(x, \varepsilon) \in J$  є розв'язками диференціально-функціонального рівняння (7) при  $(x, \varepsilon) \in J$ .

Дослідимо питання про голоморфність за змінною  $x$  матриці  $C(x, \varepsilon)$ , яка задана рівностями (14), (16). З голоморфності матриць  $A_i(x)$ ,  $B_j(x)$ ,  $i = \overline{0,4}$ ,  $j = \overline{0,5}$  випливає голоморфність матриць  $F_s(x)$ ,  $G_s(x)$ ,  $s = \overline{0,1}$ , а значить матриці  $F_s(x)$ ,  $G_s(x)$  є нескінченно – диференційовними. Тоді згідно [15] матриця  $Z(x, \varepsilon)$ , яка задана неявною рівністю (16) є нескінченно-диференційовна за змінною  $x$ . Згідно [3] матрицю  $Z(x, \varepsilon)$  можна розвинути в формальний степеневий ряд за змінною  $x$ . Відомо, що із неперервності за змінною  $x$  матриці

$$K_1(x)(F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x, \varepsilon))$$

впливає, що матрицант цієї матриці розвивається в збіжний функціональний ряд. тоді користуючись (16) одержимо, що формальний степеневий ряд за змінною  $x$  матриці  $Z(x, \varepsilon)$  є збіжним. А тому, згідно (14), матриці  $Z(x, \varepsilon)$ ,  $C(x, \varepsilon)$  є голоморфними за змінною  $x$  при  $(x, \varepsilon) \in J$ .

Аналогічно до одержаної рівності (40) можна показати існування неперервної за змінною  $\varepsilon$  матриці  $Z_1(x, \varepsilon)$  на множині  $J$  вигляду

$$Z_1(x, \varepsilon) = \int_0^1 Z'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon) d\theta \text{ такої, що справедлива рівність}$$

$$Z(x, \varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x, \varepsilon). \tag{41}$$

Врахувавши (41) введемо позначення

$$M(\tau, \varepsilon, Z_1) = K_1(\varepsilon)(F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))(I + \varepsilon Z_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon))). \tag{42}$$

Підставивши (8) в (30) і врахувавши (42) отримаємо рівняння відносно  $Z_1(x, \varepsilon)$  у вигляді

$$Z_1(x, \varepsilon) = -\Delta \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_1) \Omega_0^\varepsilon(-\Delta \varepsilon M(\tau, \varepsilon, Z_1)) d\tau. \tag{43}$$

Тоді матриця  $F_1(x, \varepsilon, Z_1)$  вигляду

$$F_1(x, \varepsilon, Z_1) = Z_1(x, \varepsilon) + \Delta \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_1) \Omega_0^\varepsilon(-\Delta \varepsilon M(\tau, \varepsilon, Z_1)) d\tau \tag{44}$$

визначена на множині  $J$ . Згідно (43), (44), неперервна на множині  $J$  матриця  $Z_1(x, \varepsilon)$  задовольняє рівняння  $F_1(x, \varepsilon, Z_1) = 0$ .

Підставляючи вигляд матрицанта із (8) в (44) одержимо розвинення матриці  $F_1(x, \varepsilon, Z_1)$  в рівномірно збіжний функціональний ряд. Причому ряди, які

складаються з частинної похідної за змінними  $Z_1$  і  $\varepsilon$  елементів одержаного ряду мажоруються відповідно рядами

$$1 + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{n+1} \varepsilon_0^{n+1} x_0^{n+1} (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^n}{n!},$$

$$\Delta x_0 (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m + \tilde{F} + \tilde{G}m + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m_1) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta^n x_0^n \varepsilon_0^{n-2} (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^{n-1}}{n!} ((\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) +$$

$$+ (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)(\alpha_7(n-1) + \varepsilon_0) + n\varepsilon_0(\tilde{F} + \tilde{G}m + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m_1)),$$

де  $m_1 = \sup_{(x,\varepsilon) \in J} \|Z_1(x, \varepsilon)\|$ .

З розвинення матриці  $(F_1(x, \varepsilon, Z_1))'_{Z_1}$  в рівномірно збіжний функціональний ряд випливає, що  $(F_1(x, \varepsilon, Z_1))'_{Z_1}$  можна зобразити у вигляді

$$(F_1(x, \varepsilon, Z_1))'_{Z_1} = I + O(\varepsilon). \tag{45}$$

В силу малості  $\varepsilon$  і з (45) отримаємо, що визначник  $\det(F_1(x, \varepsilon, Z_1))'_{Z_1} \neq 0$  існує неперервна на множині  $J$  частинна похідна  $(Z_1(x, \varepsilon))'_\varepsilon$ . А отже на множині  $J$  матрицю  $Z_1(x, \varepsilon)$  можна представити у вигляді

$$Z_1(x, \varepsilon) = Z_1(x, 0) + \varepsilon Z_2(x, \varepsilon), \tag{46}$$

де

$$Z_2(x, \varepsilon) = \int_0^1 (Z_1(x, \theta\varepsilon))'_\varepsilon d\theta, \quad Z_1(x, 0) = -\Delta x(F_0(x) + G_0(x)).$$

Припустимо, що матрицю  $Z_{k-1}(x, \varepsilon)$ , яка визначається з рівняння

$$Z_{k-1}(x, \varepsilon) = (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_{k-1}) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \varepsilon, Z_{k-1}) \times$$

$$\times \Omega_0^{\tau_{k-2}} (-\Delta \varepsilon M(\tau_{k-2}, \varepsilon, Z_{k-1})) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1 d\tau +$$

$$+ (-1)^{k-2} \Delta^{k-2} \int_0^1 \int_0^x \left( M(\tau, \theta\varepsilon, Z_{k-1}) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3}, \theta\varepsilon, Z_{k-1}) d\tau_{k-3} \dots d\tau_1 \right)' d\tau d\theta \Big|_{\varepsilon=0} \tag{47}$$

можна представити у вигляді

$$Z_{k-1}(x, \varepsilon) = Z_{k-1}(x, 0) + \varepsilon Z_k(x, \varepsilon), \tag{48}$$

де

$$Z_k(x, \varepsilon) = \int_0^1 (Z_{k-1}(x, \theta\varepsilon))'_\varepsilon d\theta,$$

$$M(\tau, \varepsilon, Z_k) = K_1(\varepsilon)(F_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon F_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + (G_0(x - \varepsilon^2 \Delta \tau) + \varepsilon G_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau))) \times$$

$$\times (I + \varepsilon Z_1(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, 0) + \dots + \varepsilon^{k-1} Z_{k-1}(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, 0) + \varepsilon^k Z_k(x - \varepsilon^2 \Delta \tau, \varepsilon)).$$

Підставивши (48) в (47) одержимо рівняння відносно матриці  $Z_k(x, \varepsilon)$  вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon Z_k(x, \varepsilon) = & -Z_{k-1}(x, 0) + (-1)^k \Delta^k \varepsilon \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k) \times \\ & \times \Omega_0^{\tau_{k-1}} (-\Delta \varepsilon M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k)) d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 d\tau + (-1)^{k-2} \Delta^{k-2} \int_0^1 \int_0^x (M(\tau, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) \times \\ & \times \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3}, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) d\tau_{k-3} \dots \tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta |_{\varepsilon=0} + \\ & + (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1 d\tau. \end{aligned} \quad (49)$$

Використовуючи (47) знаходимо  $Z_{k-1}(x, 0)$  і спрощуємо наступний вираз

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1 d\tau - Z_{k-1}(x, 0) + \\ & + (-1)^{k-2} \Delta^{k-2} \int_0^1 \int_0^x (M(\tau, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3}, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) d\tau_{k-3} \dots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta |_{\varepsilon=0} = \\ & = (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} \varepsilon \int_0^1 \int_0^x (M(\tau, \theta \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \theta \varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta |_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (50)$$

Підставивши (50) в (49) одержимо рівняння відносно матриці  $Z_k(x, \varepsilon)$  вигляду

$$\begin{aligned} Z_k(x, \varepsilon) = & (-1)^k \Delta^k \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k) \times \\ & \times \Omega_0^{\tau_{k-1}} (-\Delta \varepsilon M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k)) d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 d\tau + (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} \int_0^1 \int_0^x (M(\tau, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) \times \\ & \times \int_0^\tau M(\tau_{k-2}, \theta \varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta |_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (51)$$

Позначимо через  $F_k(x, \varepsilon, Z_k)$  матрицю вигляду

$$\begin{aligned} F_k(x, \varepsilon, Z_k) = & Z_k(x, \varepsilon) + (-1)^{k+1} \Delta^k \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_k) \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k) \times \\ & \times \Omega_0^{\tau_{k-1}} (-\Delta \varepsilon M(\tau_{k-1}, \varepsilon, Z_k)) d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 d\tau + (-1)^k \Delta^{k-1} \int_0^1 \int_0^x (M(\tau, \theta \varepsilon, Z_{k-1}) \times \\ & \times \int_0^\tau \dots \int_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \theta \varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \dots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta |_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (52)$$

Підставляючи вигляд матрицанту із (8) в (52) одержимо розвинення матриці  $F_k(x, \varepsilon, Z_k)$  в рівномірно збіжний функціональний ряд. Причому ряди, які складаються з частинної похідної за змінними  $Z_k$  і  $\varepsilon$  елементів одержаного ряду мажоруються відповідно рядами

$$1 + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Delta^{n+1} \varepsilon_0^{n+1} x_0^{n+1} (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} & \frac{x_0^k \Delta^k (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m)^{k-1}}{(k-1)!} (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2) + \\ & + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m + \tilde{F} + \tilde{G} m + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m_k) + \\ & + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Delta^n x_0^n \varepsilon_0^{n-k-1} (\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m)^{n-1}}{n!} ((\alpha_5 + \varepsilon_0 (\beta_1 + \beta_2) + \\ & + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m) (\alpha_7 (n-k) + k \varepsilon_0) + n \varepsilon_0 (\tilde{F} + \tilde{G} m + (\alpha_6 + \varepsilon_0 (\beta_3 + \beta_5)) m_k)), \\ \text{де } m_k = \sup_{(x, \varepsilon) \in J} & \left\| \sum_{i=1}^{k-1} i \varepsilon Z_i(x, 0) + k \varepsilon^{k-1} Z_k(x, \varepsilon) \right\|. \end{aligned}$$

З розвинення матриці  $(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k}$  в рівномірно збіжний функціональний ряд випливає, що  $(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k}$  можна зобразити у вигляді

$$(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k} = I + O(\varepsilon). \tag{53}$$

В силу малості  $\varepsilon$  і з (53) отримаємо, що визначник  $\det(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k} \neq 0$  і існує неперервна на множині  $J$  частинна похідна  $(Z_k(x, \varepsilon))'_\varepsilon$ . А отже на множині  $J$  матрицю  $Z_k(x, \varepsilon)$  можна представити у вигляді

$$Z_k(x, \varepsilon) = Z_k(x, 0) + \varepsilon Z_{k+1}(x, \varepsilon), \tag{54}$$

де  $Z_{k+1}(x, \varepsilon)$  визначається за формулою

$$Z_{k+1}(x, \varepsilon) = \int_0^1 (Z_k(x, \theta \varepsilon))'_\varepsilon d\theta.$$

Згідно математичної індукції випливає справедливність (54) для довільного  $k \in N$ , причому матриці  $Z_i(x, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, k+1}$  є голоморфними при  $|x| \leq x_0$  і мають неперервну похідну за змінною  $\varepsilon$  на множині  $J$ . Із (54), (48), (46) одержимо, що на множині  $J$  матрицю  $Z(x, \varepsilon)$  можна представити у вигляді

$$Z(x, \varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x, 0) + \dots + \varepsilon^k Z_k(x, 0) + \varepsilon^{k+1} Z_{k+1}(x, \varepsilon). \tag{55}$$

Підставляючи (55) в (14) одержимо, що матрицю  $C(x, \varepsilon)$  можна представити у вигляді

$$C(x, \varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \dots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(x, \varepsilon), \tag{56}$$

де  $C_1(x)$ ,  $C_i(x)$ ,  $C_{k+1}(x, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{2, k}$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} C_1(x) &= F_1(x) + G_1(x) + G_0(x) Z_1(x, 0), \quad C_i(x) = G_0(x) Z_i(x, 0) + G_1(x) Z_{i-1}(x, 0), \\ C_{k+1}(x, \varepsilon) &= G_0(x) Z_{k+1}(x, \varepsilon) + G_1(x) Z_k(x, 0). \end{aligned}$$

З явного вигляду матриць  $C_i(x)$ ,  $C_{k+1}(x, \varepsilon)$  випливає, що матриці  $C_i(x)$ ,  $C_{k+1}(x, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, k}$  є голоморфними при  $|x| \leq x_0$  і матриця  $C_{k+1}(x, \varepsilon)$  має неперервну похідну за змінною  $\varepsilon$  при  $(x, \varepsilon) \in J$ .

Враховуючи [3] і обмеженість матриці  $C_{k+1}(x, \varepsilon)$  при  $(x, \varepsilon) \in J$  впливає із рівності (56), що ряд  $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(x)$  є рівномірно при  $|x| \leq x_0$  асимптотичним розвиненням при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  матриці  $C(x, \varepsilon)$  і має місце нерівність

$$\left\| C(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^k \varepsilon^n C_n(x) \right\| \leq M |\varepsilon|^{k+1}, \quad |x| \leq x_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (57)$$

де  $M = \sup_{(x, \varepsilon) \in J} \|C_{k+1}(x, \varepsilon)\|$ .

Підставляючи явний вигляд матриці  $K(\varepsilon)$  і вигляд блочної матриці  $C(x, \varepsilon) = (C_{ml}(x, \varepsilon))$ ,  $m, l = 1, 2$  в диференціальне рівняння (9) має вигляд (4) і мають місце (5), (6).

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу і точкою звороту, одержані умови, при яких її розв'язками є розв'язки системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. Причому матриці системи диференціальних рівнянь мають асимптотичні розвинення при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  з коефіцієнтами голоморфними при  $|x| \leq x_0$ .

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points// Trans.Amer.Math.Soc. – 1959. – V. 90-P. 113-142.
2. Langer R.E. The solutions of the differential equations  $v''' + \lambda^2 z v' + 3\mu \lambda^2 v = 0$  // duke Math. J. – 1955-V. 22-P. 525-542.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. –464 с.
4. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer – Verlag New York Ins., 1985. - 243 p.
5. Дородницын А.А. асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка// УМН. – 1952. – т. 27. вып. 6(52). –С. 3-96.
6. Федорюк М.Ф. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
7. Лимов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
8. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
9. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
10. Олвер Ф. асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
11. Дзядык В.К. Некоторые специальные функции и их роль при решении неоднородных дифференциальных уравнений // В кн. Теория функции и её приложение. – Киев: Наукова думка, – 1979. – С. 61-81.
12. Шкиль Н.И. О периодических решениях систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Archivum mathematicum, Brno. –1987. – 23, № 1. – С.53-62.

13. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // УМЖ. – 2002. – 54, №11. – С. 1505-1516.

14. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // нелінійні коливання. – 2009. – 12, № 2. – С. 208-234.

15. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №5. – С. 631-640.