УДК 517.9

СИСТЕМА НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Г.В. Завізіон

Побудовано асимптотичний розв’язок нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням.

We construct asymptotic solution of a nonlinear of singularly perturbed system of differential equations with a delay.

Вступ.

Сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь із запізненням вивчаються в різних напрямках. Так в [1] пропонуються методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем із запізненням, а в [2] метод кроків з [1] застосовується до лінійних інтегро-диференціальних систем рівнянь з сталим запізненням і виродженою матрицею при похідній. Питання існування розв’язку і обґрунтування методу усереднення для багаточастотних крайових задач з сталим запізненням для сингулярно збурених систем вивчалися в [3]. В [4] досліджуються питання існування інтегральних многовидів в лінійних сингулярно збурених диференціально-різнецевих рівнянь. За допомогою проміжових функцій в [5] інтегруються нелінійні диференціально-різнецеві рівняння з малим запізненням. Самі проміжові функції задовольняють автономну нелінійну систему диференціальних рівнянь або лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь.

В даній статті розглядається нелінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з змінним запізненням. Будуються асимптотичні розв’язки, вигляд яких залежить від кратності коренів характеристичного рівняння і метод дає можливість в явному вигляді записати потрібну кількість наближень розв’язку. Пропонується спосіб побудови асимптотичного розв’язку нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з змінним запізненням у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

Асимптотичний розв’язок.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

де, $\varepsilon(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ – малий параметр, $t\in[0;L]$, $\Delta(t)$ – скалярна функція, $f(t,x,y,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon)$, $y = x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$ – n–вимірні вектори. Припускаємо виконання умов: 1) вектор $f(t,x,y,\varepsilon)$ має розвинення

$$f(t,x,y,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i(t,x,y); \tag{2}$$

і вектори $f(t,x,y)$ $(i=0,1...)$ мають нескінченну кількість частинних похідних по змінним t,x,y і функція $\Delta(t)\geq 0$, $t-\varepsilon\Delta(t)\geq 0$, $\forall t\in[0;L]$; 2) існує ізольований корінь $\bar{x}(t)$ рівняння

$$f_0(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))=0,$$

при цьому функція $\bar{x}(t)$ нескінченно-диференційовна на відрізку $[0;L]$; 3) корінь $\lambda(t)$ характеристичного рівняння

$$\det\| f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-\lambda E+f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda)\|=0$$

простий, а також виконується нерівність $\operatorname{Re}\lambda(t)<-\beta<0$, $\forall t\in[0;L]$, де E – $n\times n$ одинична матриця; $f'_{\alpha x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)), f'_{\alpha y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))$, $\alpha=0,1...$ матриці, які складені з частинних похідних компонент вектора $f_\alpha(t,x,y)$ по компонентам відповідно векторів x і y, при $x=\bar{x}(t)$, $y=\bar{y}(t)$; 4) $\det\| f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\|\neq 0$. Вірною є теорема.

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1-4, то система (1) має формальний частинний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon)=\upsilon(t,\varepsilon,\varepsilon)+u(t,\varepsilon)\Pi(t,\varepsilon,\varepsilon) \tag{3}$$

де $\upsilon(t,\varepsilon,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ – n–вимірні вектори, $\Pi(t,\varepsilon,\varepsilon)$ – скалярна функція, які мають розвинення

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s+1}u_s(t),\Pi(t,\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s(t,\varepsilon),\upsilon(t,\varepsilon,\varepsilon)=\upsilon_0(t)+\varepsilon\upsilon_1(t)+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s\upsilon_s(t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $\Pi_s(t,\varepsilon)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\varepsilon\Pi'_s(t,\varepsilon)=\lambda(t)\Pi_s(t,\varepsilon)+\xi_s(t,\varepsilon), \tag{5}$$

з початковою умовою $\Pi_s(0,\varepsilon)=1$, $\lambda(t)$, $\xi_s(t,\varepsilon)$, $s=0,1,...$ – скалярні функції.

Доведення. Скориставшись (2),(3),(4) розвинемо за степенями параметра ε вектор

$$f(t,\upsilon(t,\varepsilon,\varepsilon)+u(t,\varepsilon)\Pi(t,\varepsilon,\varepsilon),\upsilon(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon)+u(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\Pi_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon))=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^\alpha(f_\alpha(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))+\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f'_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))(\upsilon_{\alpha-s}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_j(t)\Pi_{\alpha\text{-1-s-j}}(t,\varepsilon))+f'_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))(\upsilon_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_j(t-\varepsilon\Delta(t))\Pi_{\alpha\text{-1-s-j}}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)+g_{2\alpha}(t,\varepsilon)), \tag{6}$$

де $g_{1\alpha}(t,\varepsilon)=g_{1\alpha}(t,\upsilon_l(t),\upsilon_l(t-\varepsilon\Delta(t)))$, $g_{2\alpha}(t,\varepsilon)=g_{2\alpha}(t,\upsilon_l(t),\upsilon_l(t-\varepsilon\Delta(t)))$, $p_{l_1}(t,\varepsilon)$, $p_{l_1}(t-\varepsilon\Delta(t))$ – многочлени степеня α відносно вказаних аргументів, причому другий многочлен не містить одночлена нулевого степеня відносно аргументів $p_{l_1}(t,\varepsilon)$, $p_{l_1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$ ($l=\overline{1,\alpha}$, $l_1=\overline{0,\alpha-2}$); під $p_{l_1}(t,\varepsilon)$ розуміють аргументи вигляду $u_j(t)\Pi_{l_1-j}(t,\varepsilon)$ $(j=\overline{0,l_1})$, а під $p_{l_1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$ розуміємо аргумент вигляду $u_j(t-\varepsilon\Delta(t))\Pi_{l_1-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$. Підставляючи (3)-(6) в (1) і зрівнюючи вирази, які містять $\Pi(\mathrm{t},\varepsilon,\varepsilon)$, $\Pi(\mathrm{t}-\varepsilon\Delta(\mathrm{t}),\varepsilon,\varepsilon)$, і які їх не містять, одержимо рівняння

$$\varepsilon\upsilon'(t,\varepsilon)=f_1(t,\upsilon(t,\varepsilon)+u(t,\varepsilon)\Pi(\mathrm{t},\varepsilon,\varepsilon),\upsilon(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+u(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\Pi(\mathrm{t}-\varepsilon\Delta(\mathrm{t}),\varepsilon), \qquad (7)$$

$$\varepsilon((f'_{ox}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\Pi_0(t,\varepsilon)+f'_{oy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_o(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t))\Pi_0(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon_2(((f'_{ox}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-1}(t)-u_{s-1}(t)\lambda(t)+$$
$$+f'_{1x}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-2}(t)+u'_{s-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\upsilon_o(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-1-j}(t))\Pi_0(t,\varepsilon)+$$
$$+(f'_{oy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{s-1}(t-\varepsilon\Delta(t))+f'_{1y}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-2}(t-\varepsilon\Delta(t))+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-1-j}(t-\varepsilon\Delta(t))\Pi_0(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{j=0}^{s-1}u_j(t)\xi_{s-1-j}(t,\varepsilon)+$$
$$g_{2s}(t,\varepsilon)))+\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon^s(\sum_{k=0}^{s-1-j}f'_{kx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-1-k-j}(t)+u'_{s-2-j}(t))\Pi_{\mathrm{j}}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{k=0}^{s-1-j}f'_{kx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{s-1-k-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))\Pi_{\mathrm{j}}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0, \qquad (8)$$

де

$$f_1(t,\upsilon(t,\varepsilon)+u_1(t,\varepsilon)\Pi(\mathrm{t},\varepsilon,\varepsilon),\upsilon(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+u(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\Pi(\mathrm{t}-\varepsilon\Delta(\mathrm{t}),\varepsilon))=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}(f_{\alpha}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))+\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f'_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))\upsilon_{\alpha-s}(t)+$$
$$+f'_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))\upsilon_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t))+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}g_{1\alpha}(t,\varepsilon).$$

Розвинемо за степенями параметра ε наступні функції

$$\upsilon_s(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j\overline{\upsilon}_{sj}(t,\varepsilon),u_s(t-\varepsilon\Delta(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\overline{u}_{sj}(t),$$
$$\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau\right)=\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\overline{\lambda}_j(t)\right), \qquad (9)$$
$$f_s(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=f_s(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t))+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(f'_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t))\overline{\upsilon}_{0j}(t)+\overline{g}_{sj1}(t)),\text{ де}$$
$$\overline{\upsilon}_{s0}(t,\varepsilon)=\upsilon_s(t,\varepsilon),\overline{u}_{s0}(t)=u_s(t),\overline{\upsilon}_{sj}(t,\varepsilon)=(-1)^j\upsilon_s^{(j)}(t,\varepsilon)\Delta^j(t),\overline{u}_{sj}(t)=(-1)^ju_s^{(j)}(t)\Delta^j(t);$$
$$\overline{\lambda}_1(t)=\Delta^2(t)\lambda'(t)?\ \overline{\lambda_2}(t)=\frac{\Delta^3(t)}{2!}\left(\frac{1}{4}\Delta'(t)(\lambda'(t))^2-\frac{1}{3}\lambda''(t)\right);\ \overline{g}_{sj1}(t)=0,$$

при $j=0,1$ і $\overline{g}_{sj1}(t)=\overline{g}_{sj}(t)$ при $j\geq 2$; $\upsilon_s^{(j)}(t)$ означає j похідну від $\upsilon_s(t)$; $\overline{g}_{sj}(t)=\overline{g}_{sj}(\overline{\upsilon}_{01}(t)..\overline{\upsilon}_{oj}(t))$ многочлен від вказаних аргументів. Позначимо

$$\bar{f}_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}(f'_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t))),$$
$$\bar{f}_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}\left(f'_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t))\right). \qquad (10)$$

Підставляючи (4), (9), (10) в (7) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, маємо

$$f_0\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)=0 \tag{11}$$

$$\upsilon_0'(t)=\left(f_{0x}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)+f_{0y}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)\right)\upsilon_1(t)+$$
$$+f_1\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)+f_{0y}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)\overline{\upsilon}_{01}(t) \tag{12}$$

$$\upsilon_{\alpha-1}'(t)=f_\alpha\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)+\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f_{sy}'\overline{\upsilon}_{0,\alpha-s}(t)+\overline{g}_{s,\alpha-s,1}(t))+\left(f_{0x}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)+\right.$$
$$\left.+f_{0y}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)\right)\upsilon_\alpha(t)+\sum_{s=1}^{\alpha-1}f_{sx}'\left(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t)\right)\upsilon_{\alpha-s}(t)+$$
$$\sum_{s=0}^{\alpha-s}\bar{f}_{sx}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t))\upsilon_{\alpha-1-s}(t)+\sum_{s=1}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1-s}\bar{f}_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t))\overline{\upsilon}_{\alpha-s,\alpha-1-s-j}(t)+$$
$$+\sum_{s=0}^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\alpha-2-s}\bar{f}_{sy}(t,\upsilon_0(t),\upsilon_0(t-\varepsilon\Delta(t)))\overline{\upsilon}_{\alpha-s,\alpha-2-s-j}(t)+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)). \tag{13}$$

Згідно умови (3) покладемо

$$\upsilon_0(t)=\overline{x}(t).$$

Тоді використовуючи умову 6 з рівняння (11), (12) знайдемо

$$\upsilon_1(t)=(f_{0x}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)+f_{0y}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right))^{-1}(\overline{x}'(t)-f_1\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)-f_{0y}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)\overline{\upsilon}_{01}(t)),$$

$$\upsilon_\alpha(t,\varepsilon)=(f_{0x}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)+f_{0y}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right))^{-1}(\upsilon_{\alpha-1}'(t)-f_\alpha\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)-$$
$$-\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f_{sy}'(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{\upsilon}_{0,\alpha-s}(t)+\overline{g}_{s,\alpha-s,1}(t)-\sum_{s=1}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1-s}f_{sy}'(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{\upsilon}_{\alpha-s,\alpha-1-s-j}(t)-$$
$$-\sum_{s=0}^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\alpha-2-s}\bar{f}_{sy}\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\right)\overline{\upsilon}_{\alpha-s,\alpha-2-s-j}(t)-g_{1\alpha}(t,\varepsilon)),\alpha\geq 2$$

З рівнянь (5) знайдемо, що

$$\Pi_0(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau\right),$$

$$\Pi_s(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau\right)+\overline{\Pi}_s(t,\varepsilon), \tag{14}$$

де

$$\overline{\Pi}_s(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^t\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda(\tau)d\tau\right)\xi_s(t_1,\varepsilon)dt_1,\ s=1,2...$$

Підставивши (14) в (8) до вигляду

$$\varepsilon((f_{0x}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)+\varepsilon\bar{f}_{0x}\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\right))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+$$
$$+(f_{0y}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)+\varepsilon\bar{f}_{0y}\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\right))(u_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\overline{u}_{0j}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau))+$$
$$+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s(((f_{0x}'\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\right)+\varepsilon\bar{f}\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\right))u_{s-1}(t)-u_{s-1}(t)\lambda(t)+$$

$$+(f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+\varepsilon\bar{f}_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{s-2}(t)+u'_{s-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+$$

$$+\varepsilon\bar{f}_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{s-1-j}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)+((f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+$$

$$+\varepsilon\bar{f}_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))(u_{s-1}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_{s-1,j}(t))+(f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+\varepsilon\bar{f}_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta(t)))(u_{s-1-j}(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\bar{u}_{s-1-j,r}(t))))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)+\sum_{j=0}^{s-1}u_j(t)\xi_{s-1-j}(t,\varepsilon)))+$$

$$+g_{2s}(t,\varepsilon)))+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s(\sum_{k=0}^{s-1}(f'_{kx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+\varepsilon\bar{f}_{kx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{s-1-k}(t)+$$

$$+u'_{s-2}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+\overline{\Pi}_j(t,\varepsilon))+\sum_{k=0}^{s-1}((f'_{kx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))+\varepsilon\bar{f}_{kx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta(t)))(u_{s-1-k}(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\bar{u}_{s-1-k,r})))(\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+\overline{\Pi}_j(t,\varepsilon))=0$$

Перетворюючи вирази в (15), рівняння (15) перепишемо у вигляді

$$\varepsilon((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+$$

$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)+\varepsilon^2((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_1(t)-u_1(t)\lambda(t)+$$

$$+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)+u'_0(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)+(f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_1(t)+$$

$$+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{01}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)))+$$

$$+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s(((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1}(t)-u_{s-1}(t)\lambda(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-2}(t)+u'_{s-2}(t)+$$

$$\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1-j}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+(f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1}(t)+$$

$$+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1-j}+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-2-j}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau))+$$

$$+\varepsilon^2(u_0(t)\xi_1(t,\varepsilon)+g_{22}(t,\varepsilon)+\bar{f}_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_0(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)+$$

$$+\bar{f}_{0x}\left(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\right)u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+(f'_{0x}\left(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)u_0(t)-$$

$$-u_0(t)\lambda(t))\overline{\Pi}_1(t,\varepsilon)+f'_{0y}\left(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)u_0(t)\overline{\Pi}_1(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k(u_0(t)\xi_{k-1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2}u_j(t)\xi_{k-1-j}(t,\varepsilon)+g_{2k}(t,\varepsilon)+(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\overline{\Pi}_{\text{k-1}}(t,\varepsilon)+$$

$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\overline{\Pi}_{\text{k-1}}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\bar{f}_{sk}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta))u_{k-2-s}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta))\bar{u}_{k-2-s,l}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)+\sum_{s=2}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1-j}(t)-$$

$$-u_{s-1-j}(t)\lambda(t)+u'_{s-2})\overline{\Pi}_{\text{k-s}}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{j=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{sl}(t)\overline{\Pi}_{k\text{-}s\text{-}2\text{-}j\text{-}l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))) \qquad (16)$$

З рівняння (16) визначимо $u_s(t)$ $(s=0,1...)$ наступним чином з рівняння

$$\varepsilon(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\lambda(t)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau))+$$

$$+\varepsilon^2(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_1(t)-u_1(t)\lambda(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)+u'_0(t)+$$

$$+(f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_1(t)+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)+$$

$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{01}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1}(t)-u_{k-1}(t)\lambda(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-2}(t)+u'_{k-2}+$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t))+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1}(t)+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-2}(t)+$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t)+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{k-2-j,l}(t))\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)))=0 \qquad (17)$$

Підставляючи розвинення функцій $\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)$ в степеневий ряд по ε в рівняння (17) і в одержаному рівнянні згрупуємо вирази при степенях ε, маємо:

$$\varepsilon(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t,\bar{x}(t))u_0(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t))+$$

$$+\varepsilon^2(f'_{0x}(t,\bar{x}(t,\bar{x}(t))u_1(t)-u_1(t)\lambda(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t,\bar{x}(t))u_0(t)+u'_0(t)+(f'_{0y}(t,\bar{x}(t,\bar{x}(t))u_1(t)+$$

$$+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{o1}(t)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\bar{\lambda}_1(t))\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))+$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1}(t)-u_{k-1}(t)\lambda(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-2}(t)+u'_{k-2}(t)+$$
$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t)+(f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1}(t)+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-2}(t)+$$
$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t)+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{k-2-j,l}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t))+$$
$$+\sum_{m=1}^{k-1}(\sum_{j=0}^{m-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{m-1-j}(t)+\sum_{j=0}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{m-2-j,l}(t))\times$$
$$\times\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\bar{\lambda}_{k-m}(t)))=0 \qquad (18)$$

З рівняння (16) випливає, що $\xi_s(t,\varepsilon)$ $(s=0,1...)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon^2(g_{22}(t,\varepsilon)+(u_0(t)\xi_1(t,\varepsilon)+\bar{f}_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta)(t))u_0(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)+$$
$$+\bar{f}_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_0(t)\exp(-\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-$$
$$-u_0(t)\lambda(t))\Pi_{i1}(t,\varepsilon)+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\Pi_1(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)))+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k(g_{2k}(t,\varepsilon)+$$
$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\Pi_{k\text{-}1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t)))u_{k-2-s}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda(\tau)d\tau)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t)))\bar{u}_{k-2-s,l}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)+\sum_{s=2}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)))u_{s-1-j}(t)-$$
$$-u_{s-1-j}(t)\lambda(t))+u'_{s-2}(t))\Pi_{\text{k-s}}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{sl}(t)\overline{\Pi}_{\text{k-s-2-j-1}}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0 \qquad (19)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, в рівняннях (18), (19), одержимо рівняння

$$C(t,\lambda)u_0(t)=0, \qquad (20)$$
$$C(t,\lambda)u_1(t)=-(E+f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\Delta(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))u'_0(t)+F_i(t)u_0(t), \qquad (21)$$
$$C(t,\lambda)u_{k-1}(t)=-(E+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\Delta(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))u'_{k-2}(t)+$$
$$+F(t)u_{k-2}(t)+F_{1k}(t),\ k=3,4... \qquad (22)$$
$$u_0(t)\xi_1(t,\varepsilon)=-((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\overline{\Pi}_1(t,\varepsilon)+$$
$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\overline{\Pi}_1(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))+F_{22}(t,\varepsilon), \qquad (23)$$
$$u_0(t)\xi_1(t,\varepsilon)=-((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)-u_0(t)\lambda(t))\overline{\Pi}_{\text{k-1}}(t,\varepsilon)+$$
$$+f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_0(t)\overline{\Pi}_{\text{k-1}}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))+F_{2k}(t,\varepsilon), \qquad (24)$$

де

$$C(t,\lambda(t)) = f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)) - \lambda(t)E + f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda(t)),$$
$$F(t) = -f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)) - f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda(t)) - f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{\lambda_1}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)),$$

$$F_{1k}(t) = -\sum_{j=2}^{k-1} f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t) - (\sum_{j=2}^{k-1} f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{k-1-j}(t) +$$
$$+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j} f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{u}_{k-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda(t)) - \sum_{m=1}^{k-1}(\sum_{j=0}^{m-1} f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{m-1-j} +$$
$$+\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j} f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{u}_{m-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\overline{\lambda}_{k-m}(t) +$$
$$+ f'_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{\lambda_1}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)),$$
$$F_{22}(t,\varepsilon) = -g_{22}(t,\varepsilon) - (\bar{f}_{0y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_0(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau) +$$
$$+\bar{f}_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_0(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t}\lambda(\tau)d\tau)),$$
$$F_{2k}(t,\varepsilon) = -g_{2k}(t,\varepsilon) - (\sum_{j=1}^{k-2} u_j(t)\xi_{k-1-j}(t,\varepsilon) + \sum_{s=0}^{k-2}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))\overline{u}_{k-2-s}(t)\times$$
$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t}\lambda(\tau)d\tau) + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))\overline{u}_{k-2-s,l}(t)\times$$
$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau) + \sum_{s=0}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{s-1-j}(t) - u_{s-1-j}(t)\lambda(t)) +$$
$$+u'_{s-2}(t))\overline{\Pi}_{\text{k-s}}(t,\varepsilon) + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2} f'_{jy}(\text{t},\bar{\text{x}}(\text{t}),\bar{x}(t))\overline{u}_{sl}(t)\overline{\Pi}_{k\text{-}s\text{-}2\text{-}j\text{-}l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))) = 0.$$

Розглянемо метод розв'язування рівнянь (20)-(22). В зв'язку з умовою 3 покладемо в (20):

$$u_0(t) = \alpha_0(t)\varphi(t), \qquad (25)$$

де $\varphi(t)$ власні вектори матриці $C(t,\lambda)$, $\alpha_0(t)$ – довільна функція. Умова існування рівняння (21) прийме вигляд

$$(C'_\lambda(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t))\alpha'_0(t) + (C'_\lambda(t,\lambda)\varphi'(t) + F(t)\varphi(t),\psi(t))\alpha_0(t) = 0, \qquad (26)$$

де

$$C'_\lambda(t,\lambda) = -(E + f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\Delta(t)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))$$

– похідна по λ від матриці $C(t,\lambda)$, $\psi(t)$ власні вектори матриці $C^*(t,\lambda)$, спряженої до матриці $C(t,\lambda)$. При виконанні умови 3 в [1] доведено, що $(C'_\lambda(t,\lambda(t))\varphi(t),\psi(t)) \neq 0$, $\forall t \in [0;L]$, що дає можливість однозначно знаходження $\alpha_0(t)$, $u_0(t)$ відповідно з рівнянь (26), (25). Припустивши, що $u_s(t)$ знайдені при $s < k-2$, і що

$$u_s(t) = \alpha_{k-2}(t)\varphi(t) + C^+(t,\lambda)(C'_\lambda(t,\lambda)u'_{k-3}(t) +$$
$$+F(t)u_{k-3}(t) + F_{1,k-1}(t)),\ k = 3,4... \qquad (27)$$

Враховуючи (27) і умову існування розв'язку рівняння (22) однозначно знаходимо функцію $\alpha_{k-2}(t)$ з рівняння

$$(C'_\lambda(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t))\alpha'_{k-2}(t)+((C'_\lambda(t,\lambda)\varphi'(t)+F(t)\varphi,\psi(t))\alpha_{k-2}(t)+$$
$$+C'_\lambda(t,\lambda)\frac{d}{dt}(C^+(t,\lambda)(C'_\lambda(t,\lambda)u'_{k-3}(t)+F(t)u_{k-3}(t)+F_{1,k-1}(t))+F_{1,k}(t),\psi(t))=0,$$

де $C^+(t,\lambda)$, узагальнено обернена матриця до матриці $C(t,\lambda)$, $k=3,4...$

Рівняння (23), (24) перепишемо у вигляді

$$u_0(t)\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=-(C(t,\lambda)u_0(t)\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon)+f'_{0y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_0(t)(\overline{\Pi}_{k-1}(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)-\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))+F_{2k}(t,\varepsilon),\ k=2,3...,$$

і врахувавши (20) маємо

$$u_0(t)\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=-(f'_{0y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_0(t)(\overline{\Pi}_{k-1}(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)-\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon)\exp(-\Delta(t)\lambda(t)))+F_{2k}(t,\varepsilon),\ k=2,3... \tag{28}$$

Припустимо виконання рівностей

$$\{u_0(t)\}_j\,\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=\{\widetilde{F}(t,\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon))\}_j$$

де $\{\widetilde{F}(t,\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon))\}_j$ – означає j координату правої частини рівності (28). Тоді з (28) маємо

$$\{u_0(t)\}_1\,\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=\{\widetilde{F}(t,\overline{\Pi}_{k-1}(t,\varepsilon))\}_1.$$

Але останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=-\{(f'_{0y}(t.\overline{x}(t),(t))\}_1(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)\xi_{k-1}(t_1,\varepsilon)dt_1-$$
$$-\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\varepsilon^{-1}\int_0^t\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda(\tau)d\tau)\xi_{k-1}(t_1,\varepsilon)dt_1)+\{F_{2k}(t,\varepsilon)\}_1,\ k=2,3... \tag{29}$$

Доведемо, що розв'язок $\xi_{k-1}(t,\varepsilon)$, $k=2,3...$ системи (29) є границя рівномірно збіжної послідовності $\xi^{(0)}_{k-1}(t,\varepsilon)$, $k=2,3...$, $l=0,1...$ Покладемо

$$\xi^{(0)}_{k-1}(t,\varepsilon)=0,\xi^{(1)}_{k-1}(t,\varepsilon)=-\{u_0(t)\}_1^{-1}\{F_{2k}(t,\varepsilon)\}_1,$$
$$\xi^{(l)}_{k-1}(t,\varepsilon)=-f'_{0y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)\xi^{(l-1)}_{k-1}(t_1,\varepsilon)dt_1-$$
$$-\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\varepsilon^{-1}\int_0^t\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda(\tau)d\tau)\xi^{(l-1)}_{1k-1}(t_1,\varepsilon)dt_1)+F_{2k}(t,\varepsilon)),\ k=2,3...,\ l=2,3...$$

Позначимо

$$M_1=\max_t\{f'_{0y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\}_1,\ M_2=\max_{t,\varepsilon}\{u_0\}_1^{-1}(t)\{F_{2k}(t,\varepsilon)\}_1$$
$$M_3=\max_t\exp(\beta\Delta(t))/$$

Оцінимо наступну норму різниці, при цьому скористаємось теоремою Лагранжа

$$\left\|\xi_{k-1}^{(1)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\| \le \left\{f'_{0y}\left(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)\right\}_1 (\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\varepsilon^{-1}\int_0^t \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t \lambda(\tau)d\tau)\{F_{2k}(t,\varepsilon)\} \le$$

$$\le \frac{M_1M_2}{\varepsilon}(\int_0^t \exp\left(\frac{-\beta(t-\varepsilon\Delta(t)-t_1}{\varepsilon}\right)dt_1 + \exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t \exp\left(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon}\right)dt_1) \le$$

$$\le \frac{M_1M_2}{\varepsilon}(\exp(\beta\Delta(t))\int_0^t \exp\left(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon}\right)dt_1 + \exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t \exp\left(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon}\right)dt_1) \le$$

$$\le \frac{2M_1M_2M_3}{\varepsilon}\int_0^t \exp\left(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon}\right)dt_1 = \frac{2M_1M_2M_3}{\varepsilon}(\exp 0 - \exp\left(\frac{-\beta t}{\varepsilon}\right)) =$$

$$\frac{2M_1M_2M_3}{\varepsilon}\exp\left(\frac{-\beta(1-\theta)t}{\varepsilon}\right),\ 0<\theta<1. \qquad (30)$$

Використовуючи (30) оцінимо норму різниці

$$\left\|\xi_{k-1}^{(2)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{M_1}{\varepsilon}(\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)\left\|\xi_{k-1}^{(1)}(t_1,\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-\xi_{k-1}^{(0)}(t_1,\varepsilon)\right\|dt_1 + \exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda(\tau)d\tau)\left\|\xi_{k-1}^{(1)}(t_1,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(0)}(t_1,\varepsilon)\right\|dt_1) \le$$

$$\le \frac{2M_1^2M_2M_3}{\varepsilon^2}(\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} t_1\exp(\frac{-\beta(t-\varepsilon\Delta(t)-t_1)}{\varepsilon})\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t_1}{\varepsilon})dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t t_1\exp(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon})\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t_1}{\varepsilon})dt_1) \le$$

$$\le \frac{2M_1^2M_2M_3}{\varepsilon^2}(\exp(\beta\Delta(t))\int_0^t t_1\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon})dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t t_1\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon})dt_1) \le \frac{2^2M_1^2M_2M_3^2}{\varepsilon^2}\int_0^t t_1\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon})dt_1. \qquad (31)$$

З того, що $0<\theta<1$ і $0\le t_1\le t$ маємо нерівність

$$\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon} \le \exp(\frac{-\beta(1-\theta)t}{\varepsilon}) \qquad (32)$$

Скориставшись (32) нерівність (31) прийме вигляд

$$\left\|\xi_{k-1}^{(2)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{2M_1^2M_2M_3^2t^2}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{\beta(1-\theta)t}{\varepsilon}).$$

Припустимо, що

$$\left\|\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l-1)}(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{2^lM_1^lM_2M_3^lt^l}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{\beta(1-\theta)t}{\varepsilon}) \qquad (33)$$

Тоді

$$\left\|\xi_{k-1}^{(l+1)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{M_1}{\varepsilon}\Big(\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)d\tau)\left\|\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l-1)}(t_1,\varepsilon)\right\|dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t \lambda(\tau)d\tau)\left\|\xi_{k-1}^{(l)}(t_1,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l-1)}(t_1,\varepsilon)\right\|dt_1 \le$$

$$\le \frac{2^l M_1^{l+1}M_2M_3^l}{l!\varepsilon^{l+1}}\Big(\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} t_1^l \exp(\frac{-\beta(t-\varepsilon\Delta(t)-t_1)}{\varepsilon})\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t_1}{\varepsilon})dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t t_1^l\exp(\frac{-\beta(t-t_1)}{\varepsilon})\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t_1}{\varepsilon})dt_1 \le$$

$$\le \frac{2^l M_1^{l+1}M_2M_3^l}{l!\varepsilon^{l+1}}\Big(\exp(\beta\Delta(t))\int_0^t t_1^l\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon})dt_1 +$$

$$+\exp(-\Delta(t)\lambda(t))\int_0^t t_1^l\exp(\frac{-\beta(t-\theta t_1)}{\varepsilon})dt_1 \le$$

$$\le \frac{2^{l+1} M_1^{l+1}M_2M_3^{l+1}}{l!\varepsilon^{l+1}}\int_0^t t_1^l\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t_1}{\varepsilon})dt_1 \le \frac{2^{l+1}M_1^{l+1}M_2M_3^{l+1}t^{l+1}\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t}{\varepsilon})}{(l+1)!\varepsilon^{l+1}}.$$

З того, що при $t>0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t}{\varepsilon})}{\varepsilon^l}=0,\ l=0,1\ldots$$

випливає, що існує $\varepsilon_1\in(0;\varepsilon_{0]}$, що $\forall\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $t\in(0;L]$ виконується нерівність

$$\varepsilon^{-l}\exp(\frac{-\beta(1-\theta)t}{\varepsilon})<1 \tag{34}$$

Скориставшись (34) нерівність 933) прийме вигляд

$$\left\|\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l-1)}(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{2^l M_1^l M_2 M_3^l t^l}{l!},\ \forall t\in[0;L],\ \varepsilon\in(0;\varepsilon_1] \tag{35}$$

Згідно (35) функціональний ряд

$$\left\|\xi_{k-1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\|+\left\|\xi_{k-1}^{(1)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\|+\ldots+\left\|\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)-\xi_{k-1}^{(l-1)}(t,\varepsilon)\right\|+\ldots$$

Мажорується збіжним рядом $\sum\limits_{L_0}^{\infty}\frac{M_1^lM_2M_3^lL^l}{l!}$.

Тому послідовність $\xi_{k-1}^{(l)}(t,\varepsilon)$ $(k=1,2\ldots)$ рівномірно збігається до розв'язку інтегрального рівняння (29).

Теорема доведена.

Таким чином, пропонується спосіб побудови частинного асимптотичного розв'язку сингулярно збуреної системи нелінійних диференціальних рівнянь із змінним запізненням.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 196 с.

2. Завизион Г.В. Линейная система интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известие вузов. – 2003. – Т.494, №7. С.64-69.

3. Бігун Я.Й. Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр.. мат. журн. – 2004. – Т. 56, №2. – С. 257-263.

4. Perestyuk M.O., Cherevko I.M. decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations. – 2001. – Т.4, №3. – P. 345-353.

5. Васильєва А.Б., Кутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. – 272 с.