

УДК 532.59

## НЕЛІНІЙНІ ОСОБЛИВОСТІ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ В ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ «ШАР-ШАР».

**Ю.В. Гуртовий**

Стаття присвячена проблемі поширення слабконелінійних хвильових пакетів на межі розділу двох рідких шарів з різною густиною. На основі методу багатомасштабних розвинень отримано розв'язки та нелінійне рівняння Шредінгера, яке описує еволюцію хвильового пакету внутрішніх хвиль. Проаналізовано геометричні та фізичні параметри системи, при яких виникає асиметрія гребенів і підшов хвильового пакету. Знайдені області, де виникає резонанс другої гармоніки хвильового пакету внутрішніх хвиль

The thesis is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave packets at the interface of two layers with different density. The solution and nonlinear evolutional Schrödinger equation are obtained using the method of multiple scales. Geometrical and physical parameters of two fluid systems in which unstable solution leads to creation of envelope solitons are investigated. Areas where the second-harmonic resonance of internal wave packets appears that leads to the asymmetry of crest and bottom are found.

**Вступ.** Вивчення внутрішніх хвиль кінцевої амплітуди отримало велику увагу від численних дослідників: Бенні [1], Бенджамін [2]-[3], Оно [4], Девіс та Акрівос [5], Кубота, Ко та Добс [6]. Більшість виконаної теоретичної роботи була пов'язана з аналізом хвильових рухів в системах, де внутрішні хвилі є слаболінійними і довгими по відношенню до повної товщини рідини. Подібні процедури приводять до рівняння Кортевега-де Вріза, що описують еволюцію хвильових рухів та баланс між нелінійністю і дисперсією. Це рівняння було досить добре вивчене і були знайдені методи, що дають точні розв'язки для довільно визначених початкових умов (Сегур [7]).

Додатково до цих теорій мілкої води, були прикладені зусилля для аналізу нелінійних внутрішніх хвиль в рідинах нескінченної товщини (Бенджамін [3]; Оно [4]). Тут довгі хвилі були віднесені до верхнього шару термоклин, а не до повної глибини рідини. В розглядуваній задачі “шар-напівпростір” проблема дисперсії врахована так, що в результаті еволюційне рівняння містить дисперсійний член, який є перетворенням Гільберта на відміну від рівняння Кортевега-де Вріза, де дисперсійний член є третьою похідною по просторовій координаті.

Кубота [6] вивів еволюційне рівняння, яке інтерполує ситуацію між мілкою та глибокою водою. Це рівняння, яке є справедливим коли товщина верхнього шару є значно меншою ніж вся глибина, має дисперсійний член, що є трансцендентним інтегральним оператором, і який зводиться або до третьої похідної рівнянь Кортевега-де Вріза або до перетворень Гільберта відповідно для мілкої та глибокої води (тобто, коли довжина хвилі значно більша за товщину верхнього шару).

В той же час деякі пізніші роботи торкалися цієї проблеми, відмітимо деякі з них Г.Сегур та Дж.Хаммак [8], Г.Йен та Б.Лейк [9], М.Абловіц та Г.Сегур [10], Дж.Уізем [11], П.Бхатнагар [12], І.Т.Селезов та С.В.Корсунський [13].

Із робіт, що опубліковані останнім часом про дослідження двошарових рідких систем, відмітимо наступні роботи. В статті [14] Б'юїка Мартіна та інших були змодельовані внутрішні хвилі між двома в'язкими нестисливими шарами і результати були порівнянні з хвилями генерованими в лабораторних умовах показали досить добре узгодження. Уваги заслуговують теоретичні дослідження Чоя і Камаси в роботі [15], де були розв'язані модельні рівняння, виведені з рівнянь Ейлера, які описують еволюцію внутрішніх гравітаційних хвиль в двошаровій рідині, що нев'язкі і не змішуються, причому ніякі обмеження на амплітуду не накладали. Ці ж дослідники вказали області придатності асимптотичних наближень для сильнонелінійних хвильових пакетів внутрішніх хвиль в системі «шар»-«шар» в статті [16].

Таким чином, аналіз нелінійного поширення хвиль в стратифікованих системах являє собою важливу проблему. Відмітимо, що незважаючи на інтенсивність досліджень, проблема про поширення внутрішніх хвиль розв'язана далеко не повністю. В багатьох роботах виведені еволюційні рівняння типу рівняння Кортевега-де Вріза і інших в припущенні, що характерна довжина хвилі є великою в порівнянні з товщиною рідин. Але довжини хвиль можуть бути не тільки великими, але і малими або порівнянними з параметрами рідини. Тому розв'язані у рамках різних моделей задачі про поширення внутрішніх хвиль не охоплюють всіх явищ і ефектів, які спостерігаються в дійсності. Беручи до уваги ці факти, необхідно розглянути нелінійні хвильові пакети з короткими довжинами хвиль у двошаровій рідкій системі, та якісно і кількісно проаналізувати їх поширення і стійкість та залежність від фізичних та геометричних параметрів системи.

**Постановка задачі.** Розглядається поширення хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар-шар». Верхня і нижня рідини є ідеальними, нестисливими. Хвильові рухи є потенціальними, і характеризуються малою, але скінченою амплітудою (рис. 1).

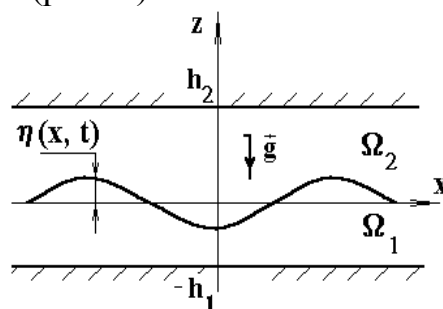


Рис. 1 Постановка задачі

Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох рідких шарів  $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 < z < 0\}$  і  $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < h_2\}$  у безрозмірному вигляді визначається системою

$$\nabla^2 \varphi_j \equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_j (j=1,2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2} \alpha [(\nabla \varphi_1)^2 - (\nabla \varphi_2)^2] - T \left[ 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при}$$

$$z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2,$$

де  $\alpha = a/L$  – коефіцієнт нелінійності,  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) – потенціали швидкостей в рідких середовищах,  $\eta$  – відхилення поверхні контакту,  $\rho = \rho_2 / \rho_1$  – відношення густин.

**Аналіз модуляційної стійкості.** На основі розв’язків, отриманих методом багатомасштабних розвинень по степеням  $\alpha$  до третього порядку [17], отримано нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для обвідної хвильового пакету в системі „шар-шар”

$$A_t + \omega' A_{,x} - 0.5 \omega'' A_{,xx} = -ik \omega^{-1} \alpha^2 (\text{cth} kh_1 + \rho \text{cth} kh_2)^{-1} I A^2 \bar{A}, \quad (1)$$

де

$$I = \Lambda \omega^2 [3 \text{cth}^2 kh_1 - 1 - \rho (3 \text{cth}^2 kh_2 - 1)] + 2k \omega^2 [2 \text{cth} kh_1 - \text{cth}^3 kh_1 + \rho (2 \text{cth} kh_2 - \text{cth}^3 kh_2)] - 1.5 T k^4 - \omega^4 (1-\rho)^{-1} [1 - \text{cth}^2 kh_1 - \rho (1 - \text{cth}^2 kh_2)]^2.$$

Після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю, а також після нормування НРШ можна подати в канонічному вигляді

$$q_t = i q_{xx} + 2 i s q^2 \bar{q},$$

де  $s = \text{sign}(I_0 \omega'')$ ,  $I_0 = -k(\text{cth} kh_1 + \text{cth} kh_2) I$ .

В якості одного із розв’язків НРШ (1) містить незалежний від  $x$  розв’язок

$$A = a \exp(i \alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t), \quad \text{де } a - \text{стала}, \quad (3)$$

але це розв’язок нестійкий, коли  $I_0 \omega'' > 0$ . Модуляційна нестійкість (нестійкість Бенджаміна – Фейра) [18] широко поширена у фізиці (нелінійна оптика, хвилі в плазмі). При даній нестійкості рівняння Шредінгера має розв’язок у вигляді солітонов обвідної або групових солітонов [19]. При хвилюванні нелінійність і дисперсія протидіють один одному і обвідної

пакету хвиль модулюється до утворення солітонів, після чого відбувається баланс нелінійності і дисперсії. Обвідна такого солітона описується гіперболічним секансом

$$A(x,t) = 2i\delta \sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\exp(-2i\vartheta(x-\omega't) - 4i(\vartheta^2 - \delta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \quad (4)$$

$$\text{де } \tilde{k} = k - 2\vartheta,$$

$$\tilde{\omega} = \omega - 2\vartheta\omega' + 4(\vartheta^2 - \delta^2).$$

Знайдені криві, які визначають межі областей модуляційної стійкості і нестійкості, які визначаються співвідношеннями  $I_0\omega'' = 0$ ,  $I_0\omega'' \rightarrow \infty$  [20].

Якщо підставити (3) у вираз для відхилення поверхні контакту рідких середовищ, розвинення  $\eta(x,t)$  за малим параметром має такий вигляд

$$\eta(x,t) = a \cos(kx - \hat{\omega}t) + \alpha a^2 \left[ \frac{\omega^2 (1 - \operatorname{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \operatorname{cth}^2 kh_2))}{1 - \rho} + 0.5\Lambda \cos 2(kx - \hat{\omega}t) \right] + O(\alpha^3), \quad (5)$$

Якщо ж умова модуляційної стійкості не виконується, то початковий хвильовий пакет розпадається на сукупність солітонів обвідної вигляду

$$A(x,t) = 2i\delta \sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\exp(-2i\vartheta(x-\omega't) - 4i(\vartheta^2 - \delta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \quad (6)$$

Солітони обвідної (6) є кінцевим утворенням еволюції при умові, що на початку був скінчений хвильовий пакет. Солітони обвідної є стійкими відносно взаємодій з іншими хвильовими пакетами. Параметри солітону  $\delta$ ,  $\vartheta$ ,  $x_0$ ,  $\varphi_0$  визначаються початковими умовами  $A(x,0)$ . Швидкість розповсюдження солітону обвідної не залежить від амплітуди. Якщо підставити (6) у вираз для відхилення поверхні контакту рідких середовищ, то розвинення  $\eta(x,t)$  в другому наближенні має вигляд

$$\eta(x,t) = \delta \sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\cos(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} + \frac{\delta^2 \omega\omega''}{\alpha I_0 \operatorname{ch}^2 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \times \left[ \frac{\omega^2 (1 - \operatorname{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \operatorname{cth}^2 kh_2))}{1 - \rho} + 0.5\Lambda \cos 2(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t) \right] + O(\alpha^3), \quad (7)$$

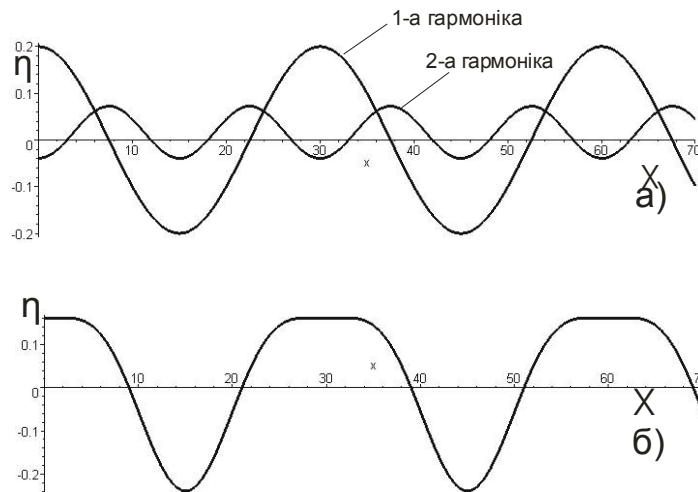
$$\text{де } \tilde{k} = k - 2\vartheta, \quad \tilde{\omega} = \omega - 2\vartheta\omega' + 4(\vartheta^2 - \delta^2).$$

**Аналіз форми хвильового пакету.** У статті [17] проведено первинний аналіз форми хвильових пакетів. Нагадаємо, що для визначення форми поверхні контакту  $\eta(x,t)$  проаналізовано знак величини  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) = \frac{L_1}{L_2}$ , який змінюється за умови переходу через криву  $L_1 = 0$ , вздовж якої  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) = 0$ , або при переході через криву  $L_2 = 0$  вздовж якої  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) \rightarrow \infty$ . Відмічено, що за великих значеннях  $h_1$  (наприклад  $h_1 = 10$ ) криві перетинаються і поділяють площину  $(\rho, k)$  на чотири області, у двох із

яких мають місце хвилі з загостреними гребнями і затупленими підошвами, а у інших двох – хвилі з затупленими гребнями і загостреними підошвами. При зменшенні товщини нижнього шару точка перетину кривих  $L_1 = 0$  та  $L_2 = 0$  опускається нижче і приблизно при значенні  $h_1 = 2.23$  областей з характерною формою залишається три. При малій товщині нижнього шару  $h_1 < 1.73$  залишається лише дві області. Це означає, що при значеннях товщини нижнього шару  $h_1 < 1.73$  і верхнього шару  $h_2 = 1$  хвильові пакети приймають  $\cup$  – подібну форму для достатньо широкої області, а у іншій вузькій області мають  $\cap$  – подібну форму.

Якщо розглядати розв’язок (3) за умови модуляційній стійкості в момент, коли вже відбувся баланс лінійності і дисперсії, тоді відхилення поверхні контакту  $\eta(x,t)$  є сумою двох косинусоїд (5), одну з яких стиснуто в два рази відносно другої, амплітуда першої гармоніки значно більша за амплітуду другої.

На рис.2 представлені перші дві гармоніки  $\eta_1(x,t)$  та  $\eta_2(x,t)$  та відхилення вільної поверхні  $\eta(x,t)$  за таких значень параметрів  $h_2 = 1, h_1 = 2, k = 0.2, t = 0, \alpha = 0.2, a = 1$ , на рис.2 а  $\rho = 0.13 (\Lambda = -1.4)$ , на рис.2 б  $\rho = 0.1 (\Lambda = 0.9)$ .

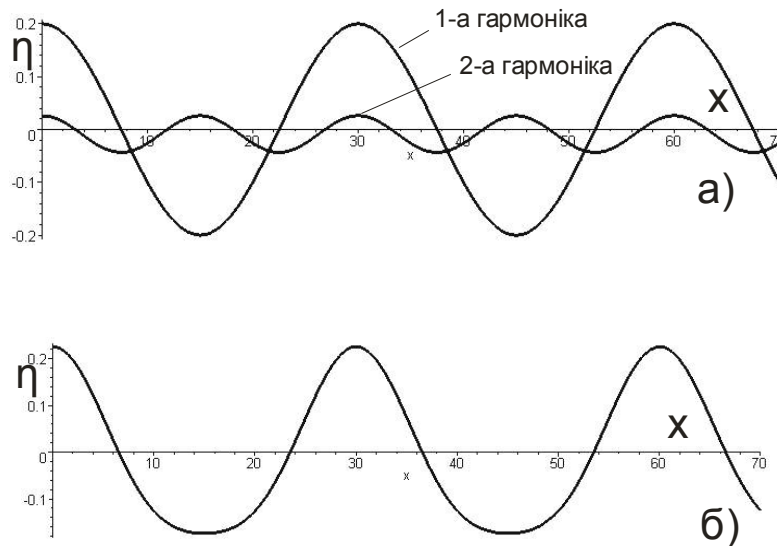


**Рис.2. Відхилення вільної поверхні при  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$**

**а) перші дві гармоніки  $\eta_1(x,t)$  та  $\eta_2(x,t)$ ; б)**

$$\eta(x,t) = \eta_1(x,t) + \alpha \eta_2(x,t)$$

Якщо  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$ , то максимуми  $\eta_1(x,t)$  та  $\eta_2(x,t)$  співпадають (рис.3 а), а мінімум  $\eta_1(x,t)$  накладається на наступний максимум  $\eta_2(x,t)$ . Отже, в областях  $S_1$  і  $S_3$  хвиля має  $\cup$ - подібну форму, як на рис.3 б



**Рис.3 Відхилення вільної поверхні при  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$**

**а) перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$ ; б)**

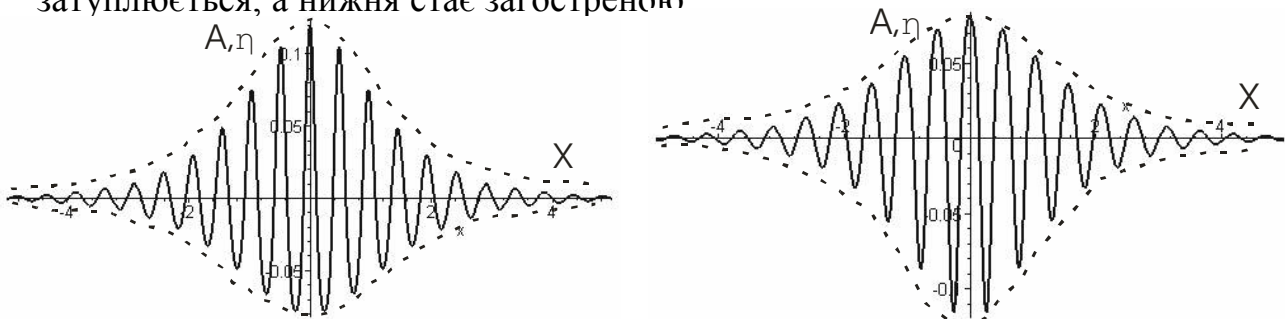
$$\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \alpha \eta_2(x, t)$$

Дослідимо як змінюється форма хвильового пакету у випадку модуляційної нестійкості в залежності від величини другої гармоніки. При цьому вважаємо, що процес утворення солітонів обвідної вже завершився.

З формули (7) випливає, що у випадку модуляційної нестійкості існують такі параметри двошарової гідродинамічної системи, що вплив амплітуди другої гармоніки приводить до загострення чи затуплення форм солітонів обвідної.

На рис.4 зображені два варіанти форми солітонів обвідної з урахуванням другої гармоніки для таких значень параметрів двошарової системи  $h_2 = 1, h_1 = 10, t = 0, \alpha = 0.14, \delta = 0.5, \vartheta = 6.5, t = 0$ . Коли

$k = 0.5, \rho = 0.1$ , то  $\Lambda = 10 > 0$ , тоді верхня обвідна загострюється, а нижня навпаки затуплюється (рис.4 а). На рис.4 б показаний аналогічний ефект впливу другої гармоніки на форму солітонів обвідної при значеннях  $k = 0.7, \rho = 0.1, \Lambda = -10 < 0$ . В цьому випадку вже верхня обвідна затуплюється, а нижня стає загостреною



**Рис.4. Форма солітону обвідної при**

**а)  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$**

**б)  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$**

Як відомо [21-22], в околі кривої  $L_2 = 0$  виникає так званий резонанс другої гармоніки, коли амплітуда другої гармоніки, зростає порівняно з

амплітудою першої. Відмітимо, що області резонансу вказують на ті параметри двошарової системи, при яких друга гармоніка набуває як завгодно великих значень. Це обумовлено нехтуванням у математичній моделі задачі в'язкості та відповідно дисипації енергії, а також відсутністю третього наближення для обвідної хвильового пакету.

**Висновок.** Таким чином, врахування другого наближення для відхилення межі розділу двох рідких шарів приводить до виникнення асиметрії гребенів і підшов модуляційно стійкого хвильового пакету. У випадку високих хвиль пакет має гострий гребінь та затуплену підшову, для пологих хвиль гребінь дещо затуплений, а підшва загострена. У випадку модуляційної нестійкості при утворенні солітонів обвідної відповідно затуплюється чи загострюється форма обвідної хвильового пакету. Для фіксованої товщини шарів, в залежності від відношення густин середовищ та хвильового числа, існують декілька областей, де можлива загострена чи затуплена форма хвиль. Якщо нижній шар значно більший за верхній, то маємо чотири таких області. Дві з указаних областей вироджуються за умови зменшення товщини нижнього шару. Вивчені характерні особливості резонансної області другої гармоніки. Резонансна область вказує на ті параметри двошарової системи, при яких друга гармоніка набуває великих значень.

#### БІБЛОГРАФІЯ

1. Benney C. J. Long nonlinear waves in fluid flows // *J. Maths. Phys.* – 1966.– 45.– P. 52.
2. Benjamin T.B. Internal waves of finite amplitude and permanent form // *J. Fluid Mech.*– 1966.–25.– P. 241–270.
3. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form of great depth // *J. Fluid Mech.*– 1967.– 29.– P. 559–592.
4. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1975.– 39. – P. 1082.
5. Davis R.E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.*– 1967.– 29.– P. 593–607.
6. Kubota, T., Ko, D. R. S., Dobbs, L.D. Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth // *AIAA J. Hydrodyn.*– 1978.– 12.– P.157–165.
7. Segur, H. The Korteweg-de Vries equation and water waves. Solutions of the equations. Part 1 // *J. Fluid Mech.*– 1973.– 59.– P. 721.
8. Segur H., Hammack J.L. Soliton models of long internal // *J. Fluid Mech.*– 1982.– 118.– P. 285–304.
9. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water waves // *Advances in Appl. Mech.*– New York, London.– 1982.– 22.–P. 33–45.
10. Ablowitz, M.J. , Segur, H. Long internal waves in fluids of great depth // *Stud. Appl. Maths.*– 1980.–62.– P. 249–262
11. Уизем Дж. Б. Линеинные и нелинейные волны.– М.: Мир, 1977.0– 622 с.
12. Bhatnagar P.L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.– Oxford: Clarendon Press, 1979.

13. Selezov I.T., Korsunsky S.V. Wave propagation along the interface between the liquid metal and electrolyte // Proc. International Conference "MHD Processes to Protection of Environment". Part 1.-i.- 1992.- P. 111-117.
14. Buick J. M., Martin A. J. Comparison of a lattice Boltzmann simulation of steep internal waves and laboratory measurements using particle image velocimetry // European J. of Mechanics B/Fluids. – 2003. – 22, №1. – P. 27-38.
15. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mechanics.- 1999. – 396, P. 1-36.
16. Camassa R., Choi W. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves// J. Fluid Mechanics.- 2006.- 549.- P.1-23.
17. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Том 7(79), № 1. – С. 80-89.
18. Фейр Дж. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами// В сб. Нелинейная теория распространения волн.- М.: Мир, 1970.- С.77-105.
19. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.- 1971.-61.- С.118-134.
20. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе //Прикладна гідромеханіка. – 2006, – 8(90), №4. – С.60-65
21. McGoldric L.F. On the replying of the small waves: a harmonic nonlinear resonant interaction // J.Fluid Mech.- 1972.- 52.- P. 725-751.
22. Nayfeh A.H. Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // J.Fluid Mech.- 1973.- 59.- P. 803-816.