**УДК 511.2**

# ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА ДИСКРЕТНИХ МНОЖИНАХ

**О.М. Вороний**

Способом доцільних задач розглянуто основні прийоми розв'язування функціональних рівнянь на дискретних множинах.

The basic methods of solving functional equations on discrete sets are considered by the way of expedient problems.

Вибір способу розв'язання функціонального рівняння залежить як від зв'язку відомих і невідомих функцій у рівнянні, так і від множини, на якій треба визначити шукану функцію, і множини, на якій функція повинна приймати свої значення. У статті, способом доцільних задач, функціональні рівняння розглядаються на множинах натуральних, цілих невід'ємних, цілих і раціональних чисел. При розв'язуванні рівнянь використовуються такі прийоми як спосіб невизначених коефіцієнтів і спосіб підстановок, принцип крайнього і метод математичної індукції, зведення до різницевих рівнянь. У якості доцільних задач обрано завдання учнівських математичних олімпіад різних рівнів.

**Задача 1.** (XXXV Всеукраїнська олімпіада юних математиків, III етап, 1995 р., 11 кл.). Функція $f$ визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значення на цій самій множині. Для довільного числа $n$ з цієї множини виконується рівність

$$f\left(f(n)\right)+f(n)=2n+3. \tag{1}$$

Знайти $f(1995)$.

Р о з в ' я з а н н я. Для відшукання невідомої функції скористаємось способом невизначених коефіцієнтів [1]. Оскільки права частина рівняння є лінійною функцією, а над невідомою функцією $f$ виконуються тільки дія утворення складеної функції і дія додавання, то логічно припустити, що $f$ є лінійною функцією:

$$f(n)=an+b, \tag{2}$$

де $a$ і $b$ – невідомі коефіцієнти. Для їх визначення підставимо функцію (2) в рівність (1). Виконуючи тотожні перетворення, отримаємо рівність двох лінійних многочленів

$$(a^2+a)n+(ab+2b)=2n+3.$$

З рівності $a^2+a=2$ дістаємо $a=1$ і $a=-2$. При $a=-2$ функція набуватиме від'ємних значень, що суперечить умові задачі. Тому $a=1$. З рівності $ab+2b=3$ знаходимо $b=1$. Отже, $f(n)=n+1$, а $f(1995)=1996$.

Однак задачу не можна вважати розв'язаною повністю, бо не виключено існування іншої функції, для якої виконується рівність (1). Припустимо, що така функція $g(n)$ існує. Тоді рівність

$$g\big(g(n)\big)+g(n)=2n+3 \tag{3}$$

виконується для всіх цілих невід'ємних $n$.

Спочатку з рівності $g\big(g(0)\big)+g(0)=3$ знайдемо $g(0)$. Зрозуміло, що $0\le g(0)\le 3$. Припустивши, що $g(0)=0$, отримаємо $0=3$. Тому $g(0)\ne 0$. Якщо $g(0)=1$, то з рівності (3) дістанемо $g\big(1\big)=2$. Нескладно (див. [2], с. 98) переконатися, що $g(0)\ne 2$ і $g(0)\ne 3$. Тому $g(0)=1$ і $f(0)=g(0)$.

Далі скористаємося очевидним твердженням: *серед будь-якої множини натуральних чисел завжди є найменше*. Це твердження називають *принципом крайнього*. Нехай $n_0$ – найменше ціле додатне число, для якого $f(n_0)\ne g(n_0)$. З рівностей (1) і (3) випливає рівність

$$f\big(f(n)\big)+f(n)=g\big(g(n)\big)+g(n), \tag{4}$$

яка виконується для всіх цілих невід'ємних значень змінної $n$. Якщо $n=n_0-1$, то з рівності

$$f\big(f(n_0-1)\big)+f(n_0-1)=g\big(g(n_0-1)\big)+g(n_0-1),$$

враховуючи, що $g(n_0-1)=f(n_0-1)=n_0$, дістаємо рівність $f(n_0)=g(n_0)$, яка суперечить припущенню. Тому $f(n)=n+1$ – єдина функція, яка задовольняє рівність (1), а $f(1995)=1996$ – єдиний розв'язок задачі.

*Зауваження.* З рівності (1) можна встановити, що $f(0)=1$, $f\big(1\big)=2$ і методом математичної індукції довести, що функція $f(n)=n+1$ є розв'язком рівняння (1). Так, зокрема, зроблено в [2], с. 98. Однак питання про єдиність шуканої функції залишилося відкритим, а отже, задача розв'язана не повністю.

Питання про єдиність розв'язку є суттєвим питанням, бо не кожне функціональне рівняння має єдиний розв'язок. Прикладом функціонального рівняння, яке має два розв'язки, є рівняння з наступної задачі.

**Задача 2.** (XLIV Всеукраїнська олімпіада юних математиків, IV етап, 2004 р., 10 кл.). Знайти усі такі функції $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$, що одночасно задовольняють наступні три умови:

1) $f(1)=1$;

2) $f(n+2)+(n^2+4n+3)f(n)=(2n+5)f(n+1)$; (5)

3) $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ для будь-яких натуральних $m>n$.

Р о з в ' я з а н н я. Поділимо обидві частини рівності (5) на $f(n)$:

$$\frac{f(n+2)}{f(n)}+n^2+4n+3=(2n+5)\frac{f(n+1)}{f(n)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(n+2)}{f(n+1)}\cdot\frac{f(n+1)}{f(n)}+n^2+4n+3=(2n+5)\frac{f(n+1)}{f(n)}. \qquad (6)$$

Введемо нову невідому функцію $\varphi(n)=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. Рівність (6) запишемо так:

$$\varphi(n+1)\varphi(n)+n^2+4n+3=(2n+5)\varphi(n). \qquad (7)$$

Оскільки функція $\varphi:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ повинна задовольняти рівність (7), то її можна способом невизначених коефіцієнтів шукати проміж лінійних функцій. Нехай $\varphi(n)=an+b$. Для визначення коефіцієнтів $a,b$ підставимо функцію $\varphi(n)=an+b$ у рівність (7) і виконаємо перетворення:

$$(a^2+1)n^2+(a^2+2ab+4)n+(b^2+ab+3)=2an^2+(5a+2b)n+5b.$$

Отримана рівність виконуватиметься для всіх натуральних чисел $n$, за умови, що

$$\begin{cases} a^2+1=2a, \\ a^2+2ab+4=5a+2b, \\ b^2+ab+3=5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ 2b+5=5+2b, \\ b^2-4b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ \left[\begin{array}{l} b=1, \\ b=3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отже, дві лінійні функції $\varphi(n)=n+1$ і $\varphi(n)=n+3$ є розв'язками функціонального рівняння (7).

Доведемо від супротивного, що рівняння інших розв'язків не має. Припустимо, що функція $g(n)$ є розв'язком рівняння (7). Тоді для всіх натуральних чисел $n$ повинна виконуватися рівність

$$g(n+1)g(n)+n^2+4n+3=(2n+5)g(n). \qquad (8)$$

Віднімемо від рівності (8) рівність (7)

$$g(n+1)g(n)-\varphi(n+1)\varphi(n)=(2n+5)g(n)-(2n+5)\varphi(n). \qquad (9)$$

Припустимо, що $n_0$ – найменше натуральне число, для якого $g(n_0)\neq\varphi(n_0)$.

Запишемо рівність (9) при $n=n_0-1$:

$$g(n_0)g(n_0-1)-\varphi(n_0)\varphi(n_0-1)=(2n_0+3)g(n_0-1)-(2n_0+3)\varphi(n_0-1).$$

Оскільки $g(n_0-1)=\varphi(n_0-1)\in\mathrm{N}$, то

$$g(n_0)g(n_0-1)-\varphi(n_0)\varphi(n_0-1)=0 \Leftrightarrow g(n_0)=\varphi(n_0).$$

Отримана рівність суперечить припущенню. Отже, рівняння (7) має тільки два знайдені розв'язки.

Перейдемо до визначення функції $f(n)$. Оскільки $f(n)\in\mathrm{N}$, то

$$f(n+1)=\frac{f(n+1)}{f(n)}\cdot\frac{f(n)}{f(n-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{f(3)}{f(2)}\cdot\frac{f(2)}{f(1)}\cdot f(1). \qquad (10)$$

Якщо $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = n+1$, то з рівності (10), враховуючи, що $f(1)=1$, отримуємо $f(n+1)=(n+1)!$. У випадку, коли $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = n+3$, маємо $f(n+1) = \dfrac{(n+3)!}{3!}$.

Отже, шуканими функціями є функції $f(n)=n!$ і $f(n) = \dfrac{(n+2)!}{3!}$.

**Задача 3.** (Квант, №1, 1999, задача М1674). Функція $f(n)$ визначена на множині натуральних чисел і задовольняє умову

$$f\big(f(n)\big) + f(n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{\textit{якщо}} \quad n - \text{\textit{непарне}}, \\ 2n-1, & \text{\textit{якщо}} \quad n - \text{\textit{парне.}} \end{cases} \tag{11}$$

Знайти $f(1999)$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $D(f)=\mathrm{N}$, то складена функція $f(f(n))$ існуватиме тільки за умови, що $\mathrm{E}(f)=\mathrm{N}$, тобто $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$. Знайдемо значення функції для двох перших значень аргументу. Для $n=1$ і $n=2$ маємо рівності

$$\begin{cases} f(f(1)) + f(1) = 3, \\ f(f(2)) + f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1), f(2) \in \{1;2\} \Rightarrow f(1)=2,\ f(2)=1.$$

Аналогічно для $n=3$ і $n=4$ дістаємо рівності

$$\begin{cases} f(f(3)) + f(3) = 7, \\ f(f(4)) + f(4) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(3), f(4) \in \{1;2;...;6\} \Rightarrow f(3)=4,\ f(4)=3.$$

На базі отриманих результатів можна припустити, що $f(n)=n-(-1)^n$ для $n=4,...,k$ задовольняє рівність (11). Доведемо, що для $n=k+1$ ця функція також задовольняє рівність (11).

$$f(f(n)) + f(n) = f(f(k+1)) + f(k+1) =$$

$$= f\Big((k+1)-(-1)^{(k+1)}\Big) + (k+1)-(-1)^{(k+1)} = (k+1)-(-1)^{(k+1)} - (-1)^{(k+1)-(-1)^{(k+1)}} + (k+1)-(-1)^{(k+1)} =$$

$$= 2(k+1)-(-1)^{(k+1)} = \begin{cases} 2(k+1)+1, \text{\textit{ якщо }} (k+1) - \text{\textit{непарне}}, \\ 2(k+1)-1, \text{\textit{ якщо }} (k+1) - \text{\textit{парне}}, \end{cases}$$

бо $(-1)^{(k+1)} - (-1)^{(k+1)-(-1)^{(k+1)}} = 0$.

Отже, згідно з методом математичної індукції $f(n)=n-(-1)^n$ є шуканою функцією. Доведемо, що вона єдина.

Припустимо, що існує функція $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ така, що:

1) $$g\big(g(n)\big) + g(n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{\textit{якщо}} \quad n - \text{\textit{непарне}}, \\ 2n-1, & \text{\textit{якщо}} \quad n - \text{\textit{парне.}} \end{cases} \tag{12}$$

2) $g(n) \neq f(n)$.

Нехай $n_0$ – найменше натуральне число, для якого виконується нерівність $f(n_0) \neq g(n_0)$. З рівностей (11) і (12) дістаємо рівність

$$f\big(f(n)\big) + f(n) = g(g(n)) + g(n),$$

яка виконується для всіх $n \in \mathrm{N}$, зокрема й для $n_0 - 1$:

$$f\big(f(n_0 - 1)\big) + f(n_0 - 1) = g(g(n_0 - 1)) + g(n_0 - 1). \qquad (13)$$

Оскільки $g(n_0 - 1) = f(n_0 - 1) = n_0 - 1 - (-1)^{n_0 - 1} = n_0$, якщо $n_0$ – парне, то з рівності (13) дістаємо рівність $f(n_0) = g(n_0)$, яка суперечить припущенню. Тому для всіх парних натуральних чисел $f(2k) = g(2k)$.

Нехай $n = 2k, k \in \mathrm{N}$. За доведеним $g(2k) = f(2k) = 2k - (-1)^{2k} = 2k - 1$. Тому з рівності $f(f(2k)) = g(g(2k))$ дістаємо рівність $g(2k-1) = f(2k-1)$, яка виконується для всіх $k \in \mathrm{N}$.

Отже, $f(n) = n - (-1)^n$ – єдина шукана функція, а $f(1999) = 2000$.

У розглянутих задачах принцип крайнього використовувався для дослідження кількості розв’язків рівняння. У наступній задачі використаємо його для дослідження існування розв’язків.

**Задача 4.** (XXIII Всесоюзна олімпіада з математики, 10 кл., 1989 р.).

Чи існує функція $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ така, що рівність

$$f(n) = f\big(f(n-1)\big) + f\big(f(n+1)\big) \qquad (14)$$

виконується для всіх $n = 2, 3, \ \dots$ ?

Р о з в ’ я з а н н я. Припустимо, що така функція існує. Оскільки її значення – натуральні числа, то при деякому натуральному $n_0$ вона набуває свого найменшого значення $m \geq 1$:

$$f(n) \geq f(n_0) = m \quad \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (15)$$

Якщо $n_0 > 1$, то з рівності (14), враховуючи (15), отримуємо нерівність

$$m = f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n_0 + 1)) \geq m + m = 2m,$$

яка не може виконуватися при додатних $m$. Якщо ж $n_0 = 1$, то серед чисел $f(2), f(3), \dots$ виберемо найменше $m_1 = f(n_1) \geq m, n_1 \geq 2$. Тоді при $n = n_1$ з рівності (14) дістанемо хибне співвідношення

$$m_1 = f(n_1) = f(f(n_1 - 1)) + f(f(n_1 + 1)) \geq m_1 + m_1 = 2m_1.$$

Отже функції, яка б задовольняла умови задачі, не існує.

Зазвичай, розв’язуючи те чи інше рівняння, намагаються звести його до рівняння, розв’язування якого або простіше, або відоме. Частинним випадком функціональних рівнянь є різницеві рівняння. Теорія лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами певною мірою нагадує теорію лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Її елементи викладено в [3]. На прикладі наступної задачі розглянемо, як можна розв’язування функціонального рівняння звести до розв’язування різницевого рівняння.

**Задача 5.** (XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, IV етап, 2007 р., 10 кл.). Знайдіть усі функції $f : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$, які для будь-яких чисел $x, y \in \mathrm{X}$ задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(xy-1) = \big(f(x)+1\big)\big(f(y)+1\big), \qquad (16)$$

якщо множина X є множиною:

а) усіх цілих чисел;

б) усіх раціональних чисел.

Р о з в ' я з а н н я. а) Припустимо, що $f$ – шукана функція. Тоді для $y=1$ і всіх цілих $x$ виконується рівність

$$f(x+1)+f(x-1)=\big(f(x)+1\big)\big(f(1)+1\big). \quad (17)$$

Рівність (17) є різницевим рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Тому розв'язки функціонального рівняння (16) потрібно шукати проміж розв'язків різницевого рівняння (17). Для розв'язання рівняння (17) скористаємось алгоритмом, наведеним в [3]. Елементи теорії різницевих рівнянь також викладено в [4].

Спочатку знайдемо $f(1)$. Для цього $y=0$ підставимо у рівність (16):

$$f(x)+f(-1)=(f(x)+1)(f(0)+1)\Leftrightarrow;$$

$$\Leftrightarrow f(x)f(0)=f(-1)-f(0)-1.$$

Припустимо, що $f(0)\neq 0$, тоді $f(x)=C$. З рівності (16) маємо

$$C+C=(C+1)(C+1)\Leftrightarrow 2C=C^2+2C+1\Leftrightarrow C^2+1=0.$$

Ліва частина останньої рівності завжди додатна, тоді як права дорівнює нулю. Тому наше припущення хибне. Отже, $f(0)=0$.

Якщо $x=0, y=0$, то з (16) дістанемо рівність:

$$f(0)+f(-1)=(f(0)+1)(f(0)+1)\Leftrightarrow f(-1)=1.$$

За умови, що $x=-1, y=1$ і $x=-1, y=-1$ матимемо ще дві рівності:

$$f(0)+f(-2)=(f(-1)+1)(f(1)+1)\Leftrightarrow f(-2)=(f(-1)+1)(f(1)+1).$$

$$f(-2)+f(0)=(f(-1)+1)(f(-1)+1)\Leftrightarrow f(-2)=(f(-1)+1)(f(-1)+1).$$

У цих рівностях ліві частини рівні, тому прирівняємо їх праві частини:

$$(f(-1)+1)(f(1)+1)=(f(-1)+1)(f(-1)+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(-1)f(1)+f(-1)+f(1)+1=(f(-1))^2+2f(-1)+1\Rightarrow f(1)=1.$$

Повернемося до рівняння (17), яке запишемо так:

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=2. \quad (18)$$

Для відповідного однорідного рівняння

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=0$$

складемо характеристичне рівняння

$$r^2-2r+1=0.$$

Його корені $r_1=r_2=1$ – додатні і рівні. Тому загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння буде такий:

$$F(x)=C_1+C_2\cdot x.$$

Враховуючи, що корені характеристичного рівняння дорівнюють 1, а права частина неоднорідного рівняння (18) є многочленом нульового степеня, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $f_0(x)=ax^2$, де $a$ – деякий коефіцієнт:

$$a(x+1)^2-2ax^2+a(x-1)^2=2\Rightarrow a=1\Rightarrow f_0(x)=x^2.$$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою його частинного розв’язку і загального розв’язку відповідного однорідного рівняння. Таким чином, $f(x)=C_1+C_2x+x^2$ – загальний розв’язок неоднорідного різницевого рівняння (18). Знайдемо $C_1, C_2$, використовуючи встановлені рівності $f(0)=0$ і $f(1)=1$:

$$C_1+C_2\cdot 0+0^2=0 \Rightarrow C_1=0,$$

$$C_1+C_2\cdot 1+1^2=1 \Rightarrow C_2=0.$$

Отже, розв’язком рівняння (16) на множині цілих чисел може бути тільки функція $f(x)=x^2$. Перевіркою переконуємося, що $f(x)=x^2$ – розв’язок рівняння (16).

б) Нехай $k$ і $n$ –довільні цілі числа, відмінні від нуля. Використовуючи три пари підстановок $x=kn,\ y=\frac{k}{n};\quad x=kn,\ y=kn+\frac{k}{n};\quad x=2kn,\ y=\frac{k}{n}$, отримаємо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} f\left(kn+\dfrac{k}{n}\right)+f\left(k^2-1\right)=\left(f(kn)+1\right)\left(f\left(\dfrac{k}{n}\right)+1\right), \\ f\left(2kn+\dfrac{k}{n}\right)+f\left(k^2+kn-1\right)=\left(f(kn)+1\right)\left(f\left(kn+\dfrac{k}{n}\right)+1\right), \\ f\left(2kn+\dfrac{k}{n}\right)+f\left(2k^2-1\right)=\left(f(2kn)+1\right)\left(f\left(\dfrac{k}{n}\right)+1\right). \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що на множині цілих чисел $f(x)=x^2$, дістаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} f\left(kn+\dfrac{k}{n}\right)+\left(k^2-1\right)^2=\left((kn)^2+1\right)\left(f\left(\dfrac{k}{n}\right)+1\right), \\ f\left(2kn+\dfrac{k}{n}\right)+\left(k^2+kn-1\right)^2=\left((kn)^2+1\right)\left(f\left(kn+\dfrac{k}{n}\right)+1\right), \\ f\left(2kn+\dfrac{k}{n}\right)+\left(2k^2-1\right)^2=\left((2kn)^2+1\right)\left(f\left(\dfrac{k}{n}\right)+1\right), \end{cases}$$

з якої знаходимо $f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$.

Таким чином, функція $f(x)=x^2$ є єдиним розв’язком рівняння (16) і на множині цілих чисел, і на множині раціональних чисел.

**БІБЛІОГРАФІЯ**

1. Вороной А.Н. Функциональные уравнения и метод неопределенных коэффициентов. // Математика в школе (РФ). – 2004. – №8. С. 62 – 66.

2. Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С. Функційні рівняння. – Львів: ЛДУ, 1998. – 111с.

3. Лихтарников Л. М., Элементарное введение в функциональные уравнения. – Санкт-Петербург: Лань, 1997.– 156с.

4. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики. – Кіровоград: РВЦ КДПУ, 2000.