УДК 513

ПЕРЛИНИ ПЛАНІМЕТРІЇ І КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович

Известные теоремы планиметрии доказываются при помощи комплексных чисел.

The known theorems of plane geometry are proved with a help of complex numbers.

1. Вступ. При вивченні математики завжди корисно розв'язати одну і ту ж задачу різними способами.

В статті розглянуто доведення ряду відомих геометричних теорем (див., наприклад, [1], [2], [3]) за допомогою комплексних чисел. Часто такий спосіб є досить повчальним, скоріше приводить до цілі й сприяє глибшому розумінню теорії комплексних чисел.

Вважаємо, що основні поняття теорії комплексних чисел відомі читачам, але на деяких моментах все ж таки зупинимося.

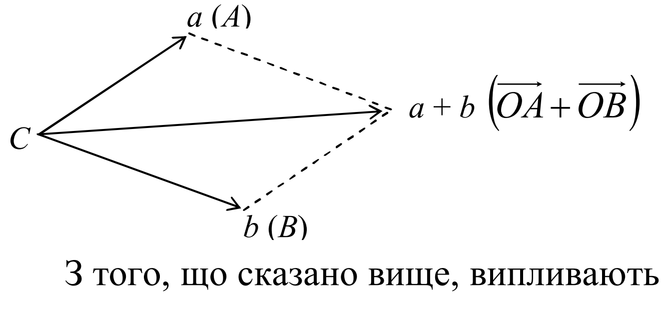
Комплексні числа $z = x + iy$, $i^2 = -1$, зображають точками (x, у) на координатній (комплексній) площині. Тоді вісь абсцис називають дійсною віссю, а вісь ординат – уявною.

При розв'язуванні задач часто використовується тлумачення комплексного числа $x + iy$ як вектора з координатами (x, у), бо додаванню і відніманню комплексних чисел відповідає додавання й віднімання відповідних векторів, при цьому довжини векторів дорівнюють модулям відповідних комплексних чисел.

Геометричні об'єкти (точки, відрізки, многокутники, кола), з якими ми маємо справу, будуть розміщуватися в комплексній площині з тим чи іншим вибором початку координат і осей.

Точки позначатимемо великими латинськими буквами, а відповідні їм комплексні числа позначатимемо малими латинськими буквами, цими ж буквами позначатимемо й відповідні вектори. Початок координат завжди позначатимемо буквою O, тоді число 0 відповідатиме цій букві.

Згідно цих домовленостей зрозумілими будуть такі записи: $\overrightarrow{AB} = b - a$, $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $b = a + \overrightarrow{AB}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \left|b - a\right|$. Якщо ми хочемо вказати точку, яка відповідає сумі $a + b$, то будуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, проводимо діагональ, яка виходить з точки О, і тоді кінець цієї діагоналі зображатиме число $a + b$.



З того, що сказано вище, випливають такі твердження.

Твердження 1. *Нехай z довільне комплексне число, а t – дійсна стала, тоді точка tz лежить на прямій, яка проходить через початок координат і точку z.*

Дійсно, якщо $t > 0$, то $\arg(tz) = \arg z$, якщо $t < 0$, то $\arg(tz) = \pi + \arg z$.

Твердження 1 випливає також і з векторного тлумачення комплексних чисел.

Твердження 2. *Нехай A та B довільні точки комплексної площини, а точка C ділить відрізок AB, починаючи з точки A, у відношенні t (тобто, AC/CB = t).*

Тоді точка C зображатиме комплексне число $c = \dfrac{a+tb}{1+t}$.

Дійсно, відношенню $AC/CB = t$, або $AC = t \cdot CB$ відповідає комплексне співвідношення $c - a = t(b - c)$, а звідси $c = (a + tb)/(1+t)$.

Зокрема, якщо $t = 1$, то точка C середина відрізка AB і є зображенням комплексного числа $(a+b)/2$.

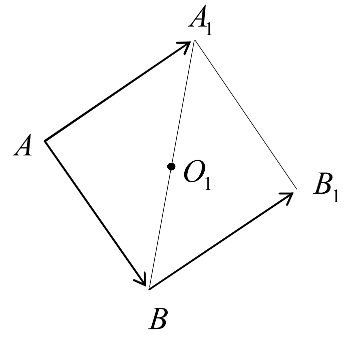
Для знаходження добутку комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 потрібно перемножити їхні модулі й скласти аргументи. На мові векторів це означає: для того, щоб отримати вектор $z_1 \cdot z_2$ потрібно довжину вектора z_1 збільшити в $|z_2|$ разів і повернути вектор z_1 проти стрілки годинника на кут, який дорівнює аргументу комплексного числа z_2.

У зв'язку з цим допускаються ще й такі записи: якщо $z_1 = \overrightarrow{AB}$, то $z_1 \cdot z_2 = \overrightarrow{AB} \cdot z_2$, і якщо $|z_2| = 1$, то для отримання числа $z_1 \cdot z_2$ потрібно вектор $\overrightarrow{AB}$ повернути проти стрілки годинника на кут $\varphi = \arg z_2$. наприклад, запис $\overrightarrow{AB} \cdot i$ означає поворот вектора $\overrightarrow{AB}$ на 90°, а запис $\overrightarrow{AB}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ означатиме поворот вектора AB на кут φ; зокрема, запис

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\right)$$

означає поворот вектора $\overrightarrow{AB}$ на кут 60° проти годинникової стрілки.

Твердження 3. *Нехай A та B довільні точки комплексної площини. Побудуємо на відрізку AB квадрат зі стороною AB зліва (справа) від AB, якщо рухатись у напрямку від A до B. Позначимо через* A_1 *і* B_1 *інші дві вершини квадрата. Тоді точка* A_1 *зображає комплексне число* $a_1 = a + (b-a)i$ $\left(a + (a-b)i\right)$, *точка* B_1 *зображає комплексне число* $b_1 = b + (b-a)i$ $\left(b + (a-b)i\right)$, *а середина квадрата* O_1 *зображає комплексне число* $\frac{1}{2}\left(a + b + (b-a)i\right)$



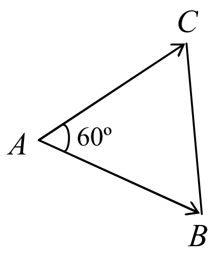
$\left(\frac{1}{2}\big((a+b)+(a-b)i\big)\right)$.

Доведення твердження 3.

Нехай A_1 і B_1 дві інші точки побудованого квадрата зліва від AB. Тоді $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}\,i=(b-a)i$, а тому точка A_1 зображає комплексне число $a+(b-a)i$, а згідно твердження 3 точка O_1 (середина побудованого квадрата) зображатиме комплексне число $\frac{1}{2}\big(b+a+(b-a)i\big)$.

Якщо ж будуватимемо квадрат справа від AB, то $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}\,(-i)=(a-b)i$, а тому точка A_1 зображатиме комплексне число $a+(a-b)i$, отже, середина цього квадрата зображатиме комплексне число $\frac{1}{2}\big(b+a+(a-b)i\big)$. □

Твердження 4. *Нехай A та B довільні точки комплексної площини. Побудуємо на відрізку AB правильний трикутник ABC зліва (справа) від AB, якщо рухатись в напрямку від A до B. Тоді вершина C зображає комплексне число* $c=\frac{1}{2}\big(a+b+i\sqrt{3}(b-a)\big)$ $\left(c=\frac{1}{2}\big(a+b+i\sqrt{3}(a-b)\big)\right)$.



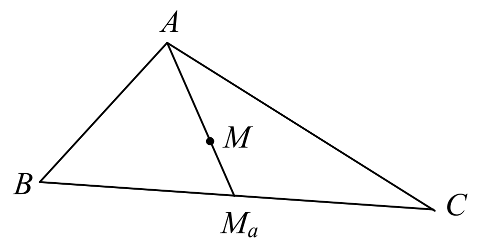
Дійсно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\,(\cos 60°+i\sin 60°)=(b-a)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

а звідси $c=a+(b-a)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(a+b+i\sqrt{3}(b-a)\big)$.

Якщо ж трикутник ABC побудовано справа від AB, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\,\big(\cos(-60°)+i\sin(-60°)\big)=(b-a)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

а звідси $c=a+(b-a)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(a+b+i\sqrt{3}(a-b)\big)$.

Тепер ми підготовлені до розв'язування більш складних задач. Почнемо з задачі про те, що медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці (ця точка називається центроїдом, або центром ваги трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.

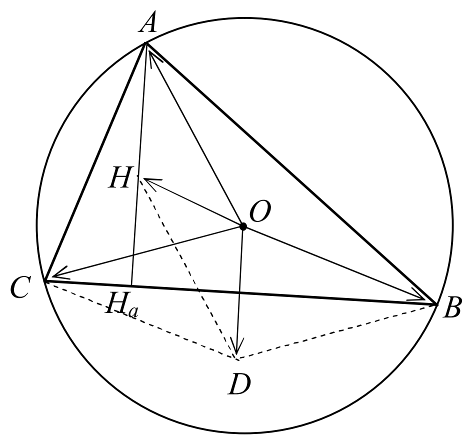


Помістимо трикутник ABC у комплексну площину і розглянемо медіану AM_a, яка проведена з точки A. Точка M_a зображає комплексне число

$\frac{1}{2}(b+c)$ (середина відрізка BC). Розглянемо точку M, яка ділить відрізок AM_a у відношенні $t = 2$, починаючи від точки A. Тоді, згідно твердження 3, точка M зображатиме комплексне число $m = \dfrac{a + \frac{b+c}{2} \cdot 2}{1+2} = \dfrac{a+b+c}{3}$; результат не залежить від вершини трикутника з якої була проведена медіана. Це означає, що точка M є спільною для всіх трьох медіан.

2. Пряма і коло Ейлера. Спочатку доведемо, що у довільному трикутнику ABC його висоти перетинаються в одній точці (ця точка називається ортоцентром трикутника).

Доведення. Помістимо трикутник ABC у комплексну площину так, що центр описаного кола співпадає з початком координат і проведемо висоту AH_a. Комплексному числу $b+c$ відповідає точка D, яка є вершиною ромба $OCDB$. Сумі векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = a+b+c$ відповідає точка H, яка лежить на відрізку AH_a, бо $OD \perp BC$. Як би ми провели такі ж міркування і відносно інших вершин, то отримали б для точки H той же результат, тобто $a+b+c$. Це означає, що всі висоти перетинаються в одній точці H і вона зображає комплексне число $a+b+c$. □



Наслідок. Точки перетину медіан, висот і центр описаного кола лежать на одній прямій.

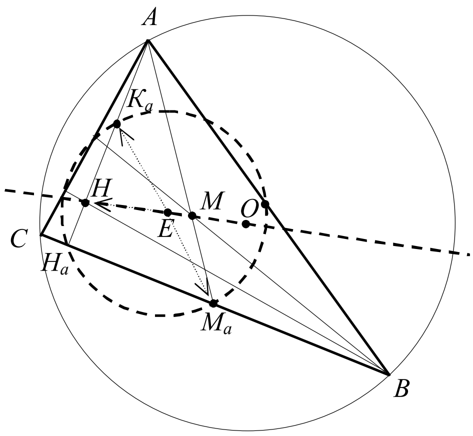
Дійсно, центр описаного кола це початок координат в комплексній площині, точка перетину медіан зображає число $\frac{1}{3}(a+b+c)$, а точка перетину висот зображає комплексне число $a+b+c$. Залишилось скористатися твердженням 1.

Примітка. Пряма, про яку йде мова, називається прямою Ейлера.

Теорема. *Нехай: точки M_a, M_b, M_c основи медіан довільного трикутника ABC, які проведені, відповідно, з вершин A, B, C; точки H_a, H_b, H_c – основи висот трикутника ABC, які проведені , відповідно, з вершин A, B, C; точки K_a, K_b, K_c – середини відрізків відповідних висот від вершин трикутника до точки перетину висот.*

Тоді всі ці дев'ять точок лежать на колі з центром в точці $E = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (якщо помістити центр описаного навколо ΔABC кола в *початок координат) радіуса* $\frac{1}{2}R$ *(коло Ейлера), де R радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.*

Доведення. Помістимо трикутник ABC у комплексну площину так, що центр O кола, описаного навколо трикутника, співпадає з початком координат. Тоді $|a| = |b| = |c| = R$ – радіус описаного кола. Через те, що точка H зображає комплексне число $a+b+c$, то точки K_a, K_b, K_c, зображають комплексні числа



$$\frac{1}{2}\left(a+(a+b+c)\right) = a + \frac{1}{2}(b+c),$$

$$\frac{1}{2}\left(b+(a+b+c)\right) = b + \frac{1}{2}(a+c),$$

$$\frac{1}{2}\left(c+(a+b+c)\right) = c + \frac{1}{2}(a+b).$$

Точки M_a, M_b, M_c зображають, відповідно, комплексні числа $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(a+c)$, $\frac{1}{2}(a+b)$. Звідси вектору $\overrightarrow{K_aE}$ відповідає комплексне число $\frac{1}{2}(a+b+c) - a - \frac{1}{2}(b+c) = -\frac{a}{2}$, вектору $\overrightarrow{M_aE}$ відповідає комплексне число $\frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{1}{2}(b+c) = \frac{a}{2}$.

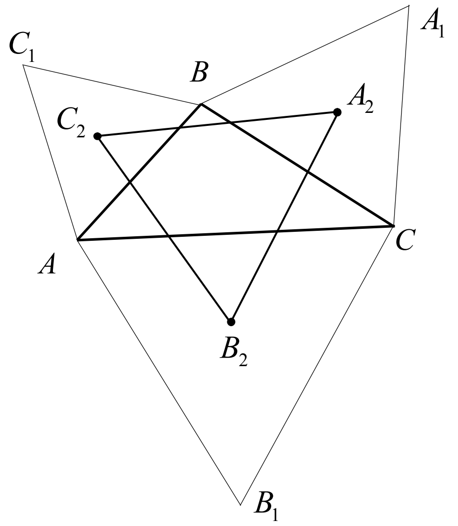
Аналогічно, вектору $\overrightarrow{K_bE}$ і $\overrightarrow{M_bE}$ відповідають, відповідно, комплексні числа $-\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, а векторам $\overrightarrow{K_cE}$ і $\overrightarrow{M_cE}$ відповідають, відповідно, комплексні числа $-\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}$ (на малюнку точки K_b, K_c, M_b, M_c не зображені). Довжини всіх цих векторів однакові й дорівнюють $\frac{R}{2}$. Тому точки K_a, M_a, K_b, M_b, K_c, M_c лежать на одному колі радіуса $\frac{1}{2}R$ з центром в точці $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Далі, через те що вектори $\overrightarrow{K_aE}$ і $\overrightarrow{M_aE}$ протилежні, то відрізок K_aM_a діаметр побудованого кола, а оскільки кут $K_aH_aM_a$ прямий (точка H_a – основа висоти), то точка H_a також буде лежати на нашому колі.

Точно такі ж міркування приведуть нас до того, що і основи H_b і H_c висот ΔABC будуть лежати на побудованому колі. □

Примітка. Через те, що центр E кола Ейлера зображає комплексне число $\frac{1}{2}(a+b+c)$, то точка E також лежатиме на прямій Ейлера. Отже, чотири точки O, M, E, H лежать на прямій Ейлера.

3. Теорема Наполеона.



Теорема. *Нехай на сторонах довільного трикутника ABC побудовані правильні трикутники. Тоді трикутник, вершинами, якого будуть центри побудованих трикутників, буде правильним.*

Нехай точки A_1, B_1, C_1 вершини побудованих трикутників, а A_2, B_2, C_2 їхні центри (див. малюнок).

Помістимо цей малюнок в довільну комплексну площину. Тоді, використовуючи твердження 4, знайдемо комплексні числа, які відповідають точкам A_1, B_1, C_1. Матимемо,

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b + c + i\sqrt{3}(c-b)\right),$$
$$b_1 = \frac{1}{2}\left(a + c + i\sqrt{3}(a-c)\right),$$
$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + i\sqrt{3}(b-a)\right).$$

Центри побудованих трикутників – точки перетину відповідних медіан. Тому

$a_2 = \frac{1}{3}(a_1 + b + c)$, $b_2 = \frac{1}{3}(b_1 + a + c)$, $c_2 = \frac{1}{3}(c_1 + a + b)$, а звідси

$$3\overrightarrow{B_2A_2} = 3(a_2 - b_2) = a_1 + b + c - b_1 - a - c = a_1 - b_1 + b - a =$$
$$\frac{3}{2}(b-a) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2c - a - b);$$
$$3\overrightarrow{B_2C_2} = 3(c_2 - b_2) = c_1 + a + b - b_1 - a - c = c_1 - b_1 + b - c =$$
$$\frac{3}{2}(b-c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b + c - 2a).$$

Повернемо вектор $\overrightarrow{B_2A_2}$ на 60° проти стрілки годинника, отримаємо

$$3\overrightarrow{B_2A_2}\,(\cos 60^{\circ} + i\sin 60^{\circ}) = \frac{3}{2}(b-a) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2c-a-b)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\frac{3}{2}(b-c)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c-2a)=3\overrightarrow{B_2C_2},$$

отже, $B_2A_2=B_2C_2$ і кут між цими сторонами дорівнює 60º, а це означає, що трикутник $A_2B_2C_2$ рівносторонній.

Із співвідношень для a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 випливає ще й таке: $a_2+b_2+c_2=a+b+c$. Через те, що точка $m=\frac{1}{3}(a+b+c)$ центроїд ΔABC, то вона буде також центроїдом $\Delta A_2B_2C_2$.

Доведемо ще такі рівності: $AA_1=BB_1=CC_1$ і що кути між цими відрізками дорівнюють 60º.

Дійсно $AA_1=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|$, $BB_1=\left|\overrightarrow{BB_1}\right|$, крім того,

$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(b+c+i\sqrt{3}(c-b)\right)-a$; $\overrightarrow{BB_1}=b-\frac{1}{2}\left(a+c+i\sqrt{3}(a-c)\right)$. Повернемо вектор $\overrightarrow{AA_1}$ на 60º проти стрілки годинника, отримаємо

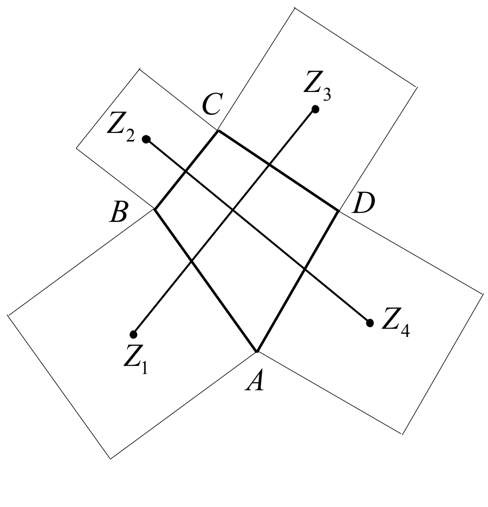
$$\overrightarrow{AA_1}\left(\cos 60°+i\sin 60°\right)=\left(\frac{1}{2}\left(b+c+i\sqrt{3}(c-b)\right)-a\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$b-\frac{1}{2}\left(a+c+i\sqrt{3}(a-c)\right)=\overrightarrow{BB_1}$, отже $\left|\overrightarrow{AA_1}\right|=\left|\overrightarrow{BB_1}\right|$. Аналогічно доводимо, що $BB_1=CC_1$.

Примітка. Теорема Наполеона залишається в силі, якщо правильні трикутники будувати до середини $\Delta\, ABC$.

4. Теорема Фордера.

Теорема. *Нехай ABCD – довільний чотирикутник. Побудуємо на його сторонах квадрати зліва (справа), якщо рухатись вздовж границі чотирикутника за стрілкою годинника. Нехай Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 – центри цих квадратів. Тоді $Z_1Z_3=Z_2Z_4$ і $Z_1Z_3\perp Z_2Z_4$.*



Доведення. Помістимо чотирикутник *ABCD* у комплексну площину. Тоді, згідно твердження 3, центри побудованих квадратів будуть зображати комплексні числа:

$$z_1=\frac{1}{2}\left(a+b+(b-a)i\right),$$

$$z_2=\frac{1}{2}\left(b+c+(c-b)i\right),$$

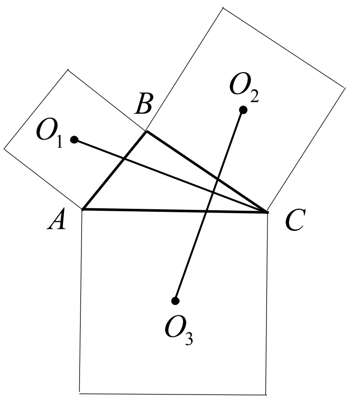
$z_3 = \frac{1}{2}\big(c + d + (d - c)i\big),\ z_4 = \frac{1}{2}\big(d + a + (a - d)i\big).$

Вектору $\overrightarrow{Z_2Z_4}$ відповідатиме комплексне число

$z_4 - z_2 = \frac{1}{2}\big(d + a - b - c + (a - d - c + b)i\big),$

а вектору $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ відповідатиме комплексне число

$z_3 - z_1 = \frac{1}{2}\big(c + d - a - b + (a + d - b - c)i\big).$ Звідси $\big(z_4 - z_2\big)i = z_3 - z_1$, а це означає, що $Z_1Z_3 = Z_2Z_4$ і $Z_1Z_3 \perp Z_2Z_4$.

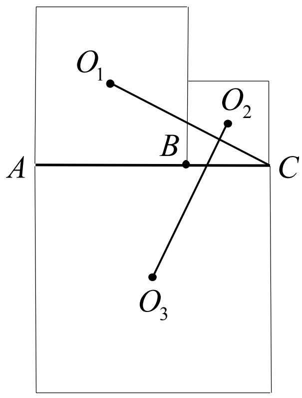


Аналогічно доводиться, коли квадрати справа. □

Наслідок 1. *Нехай ABC довільний трикутник. Побудуємо на його сторонах квадрати зліва (справа), якщо рухатися вздовж границі трикутника за стрілкою годинника. Тоді* $O_2O_3 = O_1C$, $O_2O_3 \perp O_1C$.

Дійсно, на ΔABC можна дивитися, як на чотирикутник, у якого точки C і D злилися і тоді квадрат, побудований на стороні CD перетворюється в точку C і його центр співпадає з цією точкою.

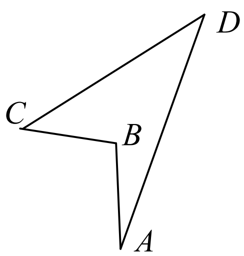
Наслідок 2. *Нехай AC довільний відрізок, а B яка-небудь точка всередині цього відрізка. Побудуємо на відрізках AB, BC і AC квадрати, як це показано на малюнку. Тоді* $O_2O_3 = O_1C$ *і* $O_2O_3 \perp O_1C$.

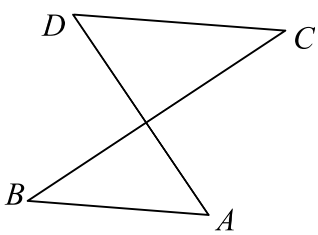


Дійсно, на відрізок ABC будемо дивитися, як на трикутник ABC, у якого вершина B знаходиться на стороні AC; залишилося застосувати наслідок 1.

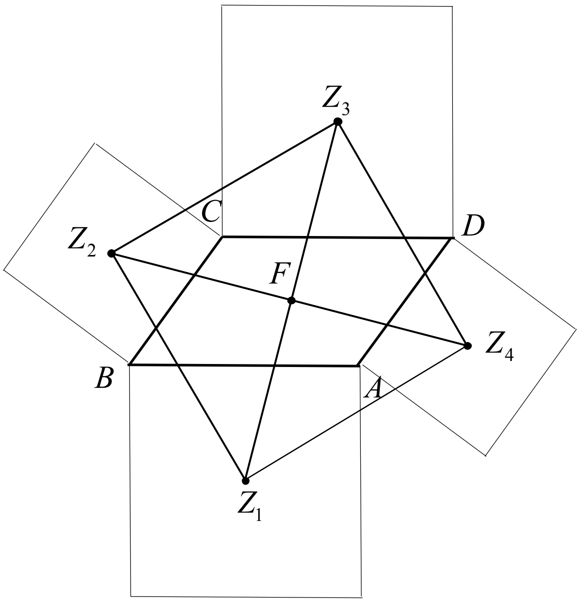
Примітка. 1. Теорема Фордера відома ще й під назвою, як теорема ван Айбеля.

2. Твердження теореми Фордера не залежить від виду чотирикутника, так що вона буде правильною і для таких чотирикутників:





Наслідок 3 (Теорема Яглома). *Нехай ABCD – довільний паралелограм. Побудуємо на його сторонах квадрати з центрами Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 зліва (справа), якщо рухатись вздовж границі чотирикутника за стрілкою годинника. Тоді чотирикутник $Z_1Z_2Z_3Z_4$ квадрат.*



Доведення. Через те, що $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$, маємо $d - c = a - b$, $c - b = a - d$. В силу твердження 3

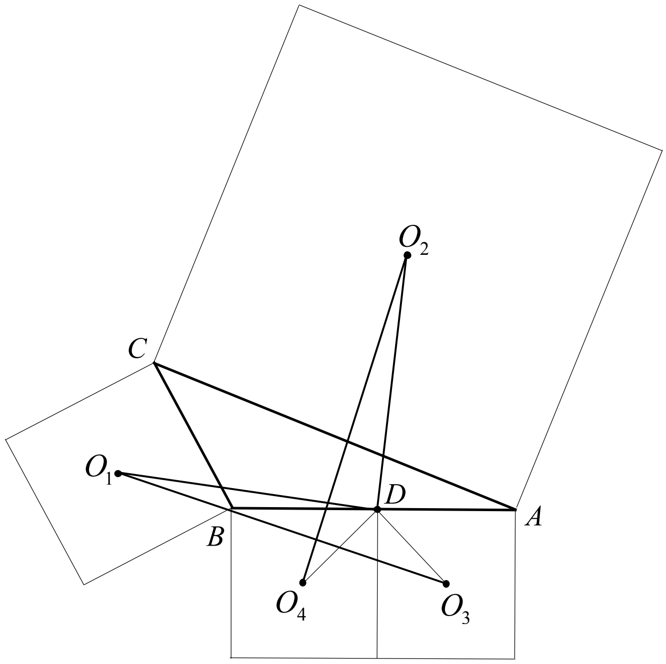
$$z_1 = \frac{1}{2}\big(a + b + (b - a)i\big),$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\big(b + c + (c - b)i\big),$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\big(c + d + (a - b)i\big),$$

$$z_4 = \frac{1}{2}\big(a + d + (b - c)i\big).$$

Тому середина відрізка Z_1Z_3 зображає комплексне число $f = \frac{1}{4}\big(a + b + c + d\big)$, це ж число відповідає й середині відрізка Z_2Z_4. Отже, ці відрізки однакові, взаємно перпендикулярні, діляться точкою f пополам; крім того, вони діагоналі чотирикутника $Z_1Z_2Z_3Z_4$, а тому цей чотирикутник квадрат. □

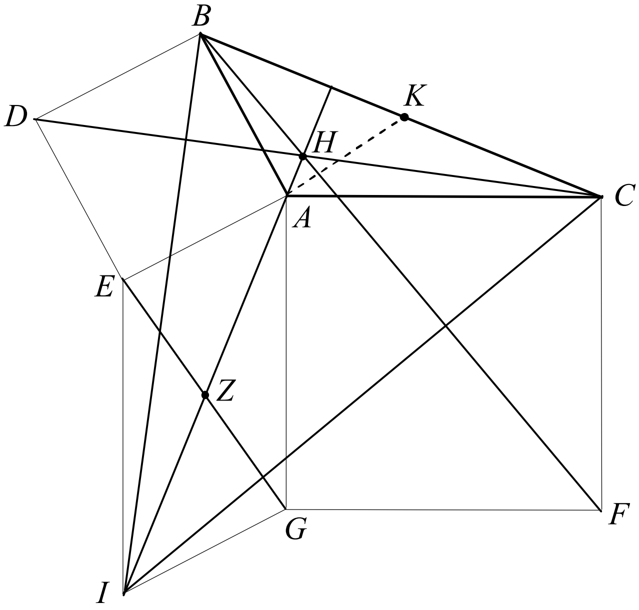


Наслідок 4. *Нехай ABC довільний трикутник, а точка D середина відрізка AB. Побудуємо на сторонах BC, AC і відрізках BD і DA квадрати зліва (справа), якщо рухатись вздовж границі трикутника за стрілкою годинника. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 центри цих квадратів. Тоді $O_1O_3 = O_2O_4$, $O_1O_3 \perp O_2O_4$; $O_1D = O_2D$, $O_1D \perp O_2D$.*

Доведення. Перші два співвідношення випливають з теореми Фордера, якщо вважати ΔABC виродженим чотирикутником з четвертою вершиною в точці D.

Рівність $O_1D = O_2D$ випливає з рівності ΔO_2O_4D і ΔO_1O_3D, бо сторони $O_1O_3 = O_2O_4$, $O_4D = O_3D$ і $\angle O_2O_4D = \angle O_1O_3D$, як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Перпендикулярність відрізків O_1D і O_2D випливає з рівності кутів O_4DO_2 і O_1DO_3 ($\angle O_1DO_4$ є спільною частиною цих кутів).□

5. Задача Адамара. Довести, що коли на сторонах *AB* і *AC* трикутника *ABC* побудувати квадрати і паралелограм *AEIG* (див. малюнок), то



1) $CD \perp BI$, $CD = BI$; $BF \perp CI$, $BF = CI$.
2) $AI \perp BC$, $AI = BC$.
3) Якщо $BK = KC$, то $AK \perp EG$, $AK = \frac{1}{2}EG$.

Доведення. Помістимо ΔABC в комплексну площину, тоді
$E = a + (b-a)i$, $D = b + (b-a)i$,

$Z = a + \frac{1}{2}(b-c)i$, $G = a + (a-c)i$,

$F = b + (a-c)i$, $K = \frac{1}{2}(b+c)$,

$\overrightarrow{AE} = (b-a)i$, $\overrightarrow{AG} = (a-c)i$,

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = (b-c)i$, а звідси $I = a + (b-c)i$.

1) $\overrightarrow{BI} = \left(a + (b-c)i\right) - b = a - b + (b-c)i$,

$\overrightarrow{DC} = c - \left(b + (b-a)i\right) = c - b + (a-b)i$. Звідси $\overrightarrow{BI} \cdot i = (a-b)i - (b-c) = \overrightarrow{DC}$, що доводить перше твердження. Аналогічно доводиться, що $\overrightarrow{IC} \cdot i = \overrightarrow{FB}$.

2) $\overrightarrow{AI} = (b-c)i = \overrightarrow{CB} \cdot i$, що рівносильне другому твердженню.

Примітка. Якщо продовжити діагональ *AI* до перетину з *BC*, то вона пройде через точку *H* – точку перетину *DC* і *BF*, які перпендикулярні до сторін ΔIBC, бо висоти трикутника перетинаються в одній точці.

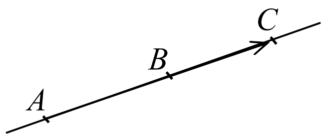
3) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(b+c) - a$;

$$\overrightarrow{EZ} = a + \frac{1}{2}(b-c)i - a - (b-a)i = \frac{1}{2}(b-c)i - (b-a)i \Rightarrow$$

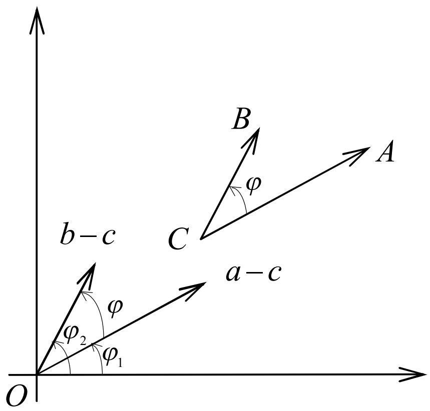
$$\overrightarrow{EZ} \cdot i = -\frac{1}{2}(b-c)i + b - a = \frac{1}{2}(b+c) - a = \overrightarrow{AK}.$$ □

6. Ще декілька задач. Для подальшого нам будуть потрібні такі твердження.

Твердження 5. *Для того, щоб точки A, B, C (які зображають комплексні числа a, b, c) належали одній прямій необхідно і досить, щоб відношення* $\dfrac{c-a}{c-b}$ *було дійсним числом.*



Доведення. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$. Їм відповідають комплексні числа $c-a$ і $c-b$. Якщо $\dfrac{c-a}{c-b}=t$ – дійсне число, то $c-a=t\left(c-b\right)$, а це означає, що вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні і мають спільний кінець *C*, а тому і початки цих векторів належать одній прямій з точкою *C*. Навпаки, якщо точки *A*, *B*, *C* належать одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні, а тому існує дійсне число t таке, що $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{BC}$, що рівносильне співвідношенню $c-a=t\left(c-b\right)$. □

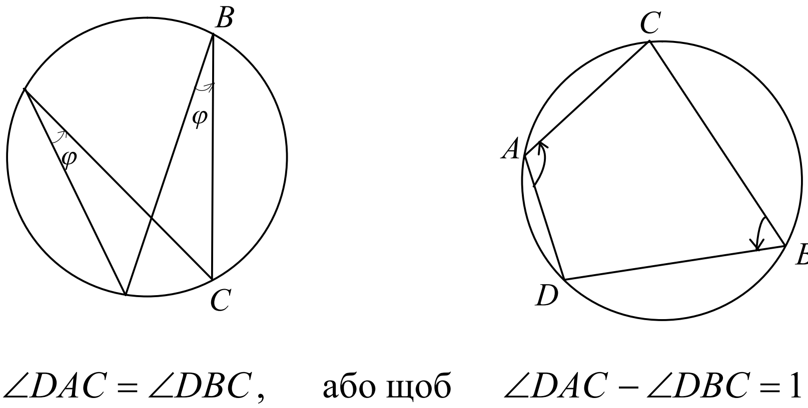


Твердження 6. *Нехай відрізки AC і BC утворюють кут φ з вершиною C. Тоді* $\varphi=\arg\dfrac{b-c}{a-c}$.

Доведення. Розглянемо вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$. Їм відповідають комплексні числа $a-c$ і $b-c$. Прикладемо ці вектори до початку координат. Отримаємо (див. рисунок): $\varphi_1=\arg\left(a-c\right)$, $\varphi_2=\arg\left(b-c\right)$, $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, а це аргумент частки від ділення комплексного числа $b-c$ на $a-c$. □

Твердження 7. *Для того, щоб точки A, B, C, D (які зображають комплексні числа a, b, c, d) належали одному колу, необхідно і досить, щоб відношення* $\dfrac{c-a}{d-a}:\dfrac{c-b}{d-b}$ *було дійсним числом.*

Доведення. З елементарної геометрії відомо, що для того, щоб точки *A*, *B*, *C*, *D* належали одному колу, необхідно і досить, щоб



$$\angle DAC=\angle DBC, \quad \text{або щоб} \quad \angle DAC-\angle DBC=180^\circ$$

(враховується напрям відліку кутів).

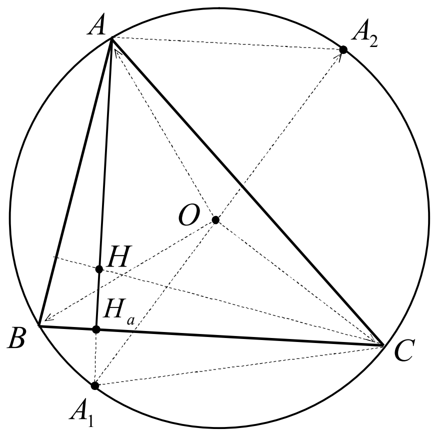
В першому випадку (в силу твердження 6) $\angle DAC = \arg\dfrac{c-a}{d-a}$, $\angle DBC = \arg\dfrac{c-b}{d-b}$, а тому частка від ділення комплексного числа $\dfrac{c-a}{d-a}$ на число $\dfrac{c-b}{d-b}$ матиме своїм аргументом число 0, а отже буде додатнім числом.

В другому випадку ця частка матиме своїм аргументом 180º, а, отже, буде від'ємним числом. □

Твердження 8. *Якщо навколо ΔABC описано коло з центром в початку координат і вершини ΔABC є зображеннями комплексних чисел a, b, c, то основа H_a висоти трикутника, яка проведена з вершини A, є зображенням комплексного числа*

$$\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right).$$

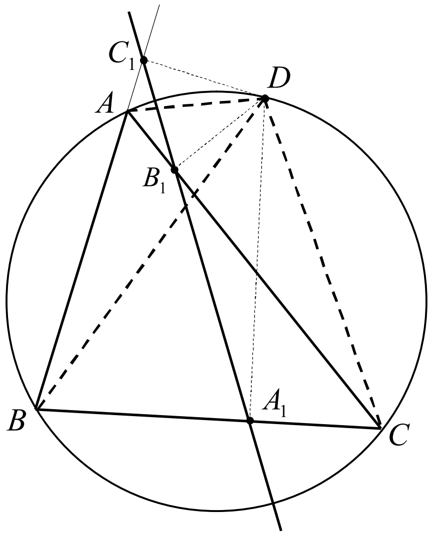
Доведення. Нехай A_1 точка перетину продовження відрізка AH_a з колом, а точка A_2 кінець діаметра A_1A_2. Тоді $\angle A_2AA_1 =$ 90º, тому $AA_2 // BC$ і тому $\cup CA_2 = \cup BA$, а звідси випливає, що $\angle COA = \angle BOA_2$, який позначимо через α. Через те, що вектор $\overrightarrow{OA}$ можна отримати поворотом вектора $\overrightarrow{OC}$ на кут α, а вектор $\overrightarrow{OB}$ можна отримати поворотом вектора $\overrightarrow{OA_2}$ на кут α, то $a = c(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = a_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, а звідси $a_2 = \dfrac{bc}{a}$,



$a_1 = -a_2 = -\dfrac{bc}{a}$. Далі, $\angle BCA_1 = \angle BAA_1 = \angle HCB$, отже ΔHCA_1 рівнобедрений, і, отже, H_a це середина відрізка A_1H. Але точка H зображення комплексного число $a+b+c$ (див. п.2), тому точка H_a зображення числа $\dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{bc}{a}\right)$. □

Задача 1. Довести, що коли з довільної точки D, яка належить описаному навколо ΔABC колі, опустити на сторони трикутника перпендикуляри, то їхні основи належать одній прямій.

Доведення. Розташуємо ΔABC в комплексній площині так, щоб центр кола описаного навколо трикутника співпадав з початком координат. Користуючись теоремою 1, знайдемо комплексні числа a_1, b_1, c_1, які



відповідають основам висот A_1, B_1, C_1. Матимемо: $a_1 = \frac{1}{2}\left(b+c+d-\frac{bc}{d}\right)$,

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(a+c+d-\frac{ac}{d}\right), \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(a+b+d-\frac{ab}{d}\right).$$

Звідси

$$\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1} = \frac{a+c+\frac{b}{2}(c-a)}{b-c+\frac{a}{2}(c-b)} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b},$$

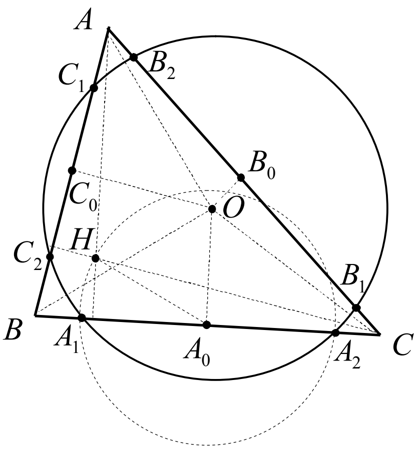
а через те, що точки A, B, C, D лежать на колі, то в силу твердження 7 отримане відношення дійсне число, а звідси, використовуючи твердження 5, випливає, що точки A_1, B_1, C_1 належать одній прямій. Ця пряма називається прямою Симпсона ΔABC відносно точки D. □

Задача 2. (Теорема Птоломея). Довести, що коли чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, то сума добутків його протилежних сторін дорівнює добутку його діагоналей.

Доведення. Скористаємося попереднім рисунком, вважаючи, що точка D вершина чотирикутника. Побудуємо пряму Сімпсона ΔABC відносно точки D. маємо $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. $A_1C_1 = |c_1 - a_1| = \frac{|c-a|\cdot|b-d|}{|d|} = \frac{AC \cdot BD}{|d|}$,

$$A_1B_1 = |b_1 - a_1| = \frac{|b-a|\cdot|c-d|}{|d|} = \frac{AB \cdot CD}{|d|},$$

$B_1C_1 = |c_1 - b_1| = \frac{|c-b|\cdot|d-a|}{|d|} = \frac{BC \cdot AD}{|d|}$, а звідси випливає теорема Птоломея. □



Задача 3. Нехай ABC довільний трикутник. H – точка перетину його висот, A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, AC, AB. Проведемо через точку H кола з центрами в точках A_0, B_0, C_0 і позначимо через A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, відповідно, точки перетину цими колами сторін трикутника (або їх продовження). Довести , що точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 належать одному колу.

Доведення. Помістимо ΔABC у комплексну площину так, щоб початок координат O був центром описаного навколо трикутника кола. Нехай вершини трикутника A, B, C є зображенням, відповідно, комплексних чисел $a = R\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$, $b = R\left(\cos\beta + i\sin\beta\right)$, $c = R\left(\cos\gamma + i\sin\gamma\right)$, де R – радіус описаного кола, а α, β, γ аргументи чисел a, b, c. Тоді точка H буде зображенням комплексного числа $a+b+c$ (див. пункт 2), точка A_0 буде зображенням числа $\frac{1}{2}(b+c)$, B_0 зображає число $\frac{1}{2}(a+c)$, C_0 зображає число $\frac{1}{2}(a+b)$. Звідси

$$A_0A_1 = A_0A_2 = A_0H = \left|\overrightarrow{A_0H}\right|^2 = \left|a+b+c-\frac{b+c}{2}\right|^2 = \left|a+\frac{1}{2}(b+c)\right|^2 =$$

$$R^2\left(\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}(\cos\beta+\cos\gamma)\right)^2+\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)\right)^2\right)=$$

$$R^2\left(\frac{3}{2}+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\right),$$

$$OA_0^{\ 2} = \left|\overrightarrow{OA_0}\right|^2 = \left|\frac{b+c}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}R^2\left((\cos\beta+\cos\gamma)^2+(\sin\beta+\sin\gamma)^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\cos(\beta-\gamma)\right)R^2.$$

Далі, з прямокутного трикутника A_1A_0O

$$A_1O^2 = A_0A_1^{\ 2}+OA_0^{\ 2} = R^2\left(2+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\right).$$

Точно так одержимо і

$$B_1O^2 = \left|b+\frac{1}{2}(a+c)\right|^2+\left|\frac{a+c}{2}\right|^2 = C_1O^2 = \left|c+\frac{1}{2}(a+b)\right|^2+\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 =$$

$$R^2\left(2+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\right).$$

За побудовою $B_1O = B_2O$, $C_1O = C_2O$. Отже,

$A_1O = A_2O = B_1O = B_2O = C_1O = C_2O$, що т.д.

В процесі доведення встановлено, що центр побудованого кола співпадає з центром описаного навколо ΔABC кола і його радіус r знаходиться за формулою $r = R\sqrt{2+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)}$.

З цієї формули можна отримати для r і вираз, який не залежить від вибору початку координат. Введе позначення: $\angle BAC = \alpha_1$, $\angle CBA = \beta_1$, $\angle ACB = \gamma_1$. Тоді $\cos(\alpha-\beta) = \cos 2\gamma_1$, $\cos(\alpha-\gamma) = \cos 2\beta_1$, $\cos(\beta-\gamma) = \cos 2\alpha_1$, і, отже

$$r = R\sqrt{2+\cos 2\alpha_1+\cos 2\beta_1+\cos 2\gamma_1}\ . \square$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1, М.,Учпедгиз, 1948.
2. Яглом И.М. Комплексные числа, М., ФМ, 1968.
3. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л., М., Наука, 1978.