УДК 517.9

ПОБУДОВА РІВНОМІРНОЇ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

В.М. Бобочко

Вивчається сингулярно збурене диференціальне рівняння (СЗДР) $\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x)$ де $\varepsilon \succ 0$ – малий параметр, $x \in [0:1]$ за виконання умов $\widetilde{a}(x), b(x), h(x) \in C[0;1]$, $\widetilde{a}(x) \succ 0$ коли $x \in [0;1]$, $b(0) \neq 0$.

Досліджується СЗДР коли точка $x = 0$ є диференціальною точкою звороту для даного рівняння. Побудовано чотири лінійно незалежні розв'язки, які є досить гладкими на всьому відрізку $[0;1]$, тобто включаючи і точку звороту $x = 0$.

This Work deals wits the singular perturbing differential equation $\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x)$ where $\varepsilon \succ 0$ – to a small parameter, $x \in [0:1]$ according to $\widetilde{a}(x), b(x), h(x) \in C[0;1]$, $\widetilde{a}(x) \succ 0$ rodent $x \in [0;1]$, $b(0) \neq 0$.

The work also researches rodent the point $x = 0$ is a turning point in the differential equation for equation (1). There ore font linear independent solution, which are rather smooth on he wolde segment $[0;1]$, i.e. including the turning point $x = 0$.

Постановка задачі. Розглянемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (СЗДР)

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x) \tag{1}$$

де $\varepsilon \succ 0$ – малий параметр, $x \in [0:1]$.

Для цього рівняння вже досить давно побудовано чотири лінійно незалежні розв'язки (див.[1], с. 228). Проте три із них придатні тільки поза точкою звороту $x = 0$.

Рівняння (1) будемо вивчати за виконання таких умов:

$$\widetilde{a}(x), b(x), h(x) \in C[0;1], \quad \widetilde{a}(x) \succ 0 \quad \text{коли} \quad x \in [0;1], \quad b(0) \neq 0. \tag{2}$$

Спектр рівняння (1) (корені характеристичного рівняння) задовольняє умовам

$$Sp\mathbf{L}_\varepsilon = \left\{\lambda_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x\widetilde{a}(x)}\right\}, \qquad \lambda_3(x) \equiv \lambda_4(x) \equiv 0, \tag{3}$$

тобто $x = 0$ є класичною точкою звороту для рівняння (1). Оскільки вона знаходиться біля похідної другого порядку, то її будемо називати **диференціальною точкою звороту другого порядку**.

У [2-5] описано метод побудови рівномірно придатної асимптотики розв'язку рівняння Ліувілля, СЗДР типу Орра-Зоммерфельда та системи СЗДР з різним характером алгебраїчної точки звороту.

1. Структура розв'язку виродженого рівняння. Розглянемо вироджене рівняння, яке відповідає СЗДР (1), тобто рівняння

$$\mathbf{L}_0 y(x,\varepsilon) \equiv \widetilde{a}(x)\omega''(x,\varepsilon) + b(x)\varpi(x,\varepsilon) = h(x). \tag{1.1}$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\omega(x)=\gamma_1\omega_1(x)+\gamma_2\omega_2(x)+\omega_{част.}(x). \tag{1.2}$$

Тут $\gamma_ё$ – довільні сталі, $\omega_1(x)=x\widetilde{\omega}_1(x)$ $\omega_2(x)=\widetilde{\omega}_2(x)+\gamma\, x\ln x\,\widetilde{\omega}_1(x)$, $\widetilde{\varpi}_k(x)$ – аналітичні функції в околі точки звороту, причому

$$\widetilde{\omega}_1(x)=1-\gamma x+O(x^2),\quad \gamma=b(0)\cdot(2\widetilde{a}(0))^{-1}\neq 0,\quad \widetilde{\omega}_2(x)=-2^{-1}+O(x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1) є досить гладкою функцією на всьому відрізку $[0:1]$, включаючи і точку звороту $x=0$.

У даному випадку для побудови частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1.1) не виникає ніяких труднощів, тобто частинний розв'язок будуємо у вигляді ряду

$$Y_{\times\grave{a}\tilde{n}\grave{o}.}(x,\varepsilon)=\sum_{r=o}^{\infty}\varepsilon^{3r}y_r(x), \tag{1.3}$$

коефіцієнти якого визначаються як частинні розв'язки рекурентної системи рівнянь

$$\mathbf{L}_0\widetilde{y}_0(x)\equiv h(x),\qquad \mathbf{L}_0\widetilde{y}_r(x)\equiv-\widetilde{y}(x)^{(4)}_{(r-1)}(x). \tag{1.4}$$

Основною метою даної праці є побудова таких лінійно незалежних розв'язків СЗДР (1), які були б рівномірно придатними на всьому відрізку $[0:1]$, включаючи і точку звороту $x=0$. Для досягнення цієї мети застосуємо метод, розроблений автором для сингулярно збурених задач з алгебраїчною точкою звороту та диференціальною точкою звороту першого порядку.

2. Розширення збуреної задачі. Для виділення, описання та збереження як єдиних цілих у розв'язкові СЗДР (1) всіх істотно особливих розв'язків (ІОР), породжених особливою точкою $\varepsilon=0$, згідно розробленого методу, поряд з незалежною змінною $x\in[o:1]$, введемо додаткову змінну t згідно правила $t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)\equiv\Phi(x,\varepsilon)$, де регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягає визначенню.

Тоді (див. [6], стор. 40) замість функції $y(x,\varepsilon)$, будемо вивчати, так звану, розширену функцію $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$, причому розширення проводимо таким чином, щоби виконувалась тотожність $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\equiv y(x,\varepsilon)$.

Продиференціюємо цю тотожність і підставимо повну похідну в СЗДР (1). Тоді для визначення розширеної функції $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$ отримаємо розширене рівняння

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon y(x,\varepsilon)=h(x). \tag{2.1}$$

Розширений оператор $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ має вигляд

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon=\varepsilon^{-1}[\varphi(x)]^4\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\varepsilon^{-2}x\widetilde{a}(x)[\varphi(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon^{-1}a(x)\mathrm{d}\frac{\partial}{\partial t}+c(x)\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+\mathbf{L_0}+\mathbf{L}_1\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\varepsilon c(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\mathbf{L}_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon^2\mathbf{L}_3\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}, \tag{2.2}$$

де

$$\mathbf{L_0}\equiv xa(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b(x),\quad \mathbf{d}\equiv 2\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi''(x),\quad \mathbf{L}_1\equiv 4[\varphi'(x)]^3\frac{\partial}{\partial x}+6\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Оператори $\mathbf{L}_2$ і $\mathbf{L}_3$ будуть відігравати другорядну роль в побудові асимптотики розв'язку і при необхідності їх явний вигляд легко виписати.

3. Модельне рівняння та його розв'язок. Для побудови асимптотики розв'язку СЗДР з алгебраїчною точкою звороту та диференціальною точкою звороту першого порядку використовувалось модельне рівняння Ейрі .

Проведені автором дослідження показали, що оператор Ейрі для побудови асимптотики розв'язку СЗДР (1) не може відігравати роль основного оператора. Головним модельним рівнянням для побудови асимптотики розв'язку рівняння (1) буде модельне рівняння

$$\widetilde{\mathbf{T}}W(t) \equiv W^{(4)}(t) + tW(t) = 0 . \tag{3.1}$$

Модельний оператор $\mathbf{T}$ виділимо у розширеному операторі $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ з наступних двох доданків таким чином:

$$[\varphi(x)]^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \varepsilon^{-1} x\widetilde{a}(x)[\varphi(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv [\varphi(x)]^4 \mathbf{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2} . \tag{3.2}$$

У рівності (3.2) введено позначення $\varepsilon^{-1} x\widetilde{a}(x)[\varphi'(x)]^{-2} \equiv t\Big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv \varepsilon^{-1}\varphi(x)$.

З даної тотожності отримаємо наступне рівняння для визначення регуляризуючої функції: $\varphi(x)[\varphi'(x)]^2 = x\widetilde{a}(x)$. Легко перевірити, що розв'язком даного рівняння за початковою умовою $\varphi(0) = 0$ буде функція

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)dx} \right)^{2/3} . \tag{3.3}$$

Отже, для досліджуваного випадку регуляризуюча функція (3.3) та сама, що і регуляризуюча функція при дослідження СЗДР з алгебраїчною точкою звороту та диференціальною точкою звороту першого порядку.

Визначимо лінійно незалежні розв'язки модельного рівняння (3.1, які будуть задовольняти початковим умовам

$$W_1(0) = 0, \quad W_1'(0) = -3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad W_1''(0) = 1, \quad ,W_1'''(0) = 0,$$

$$W_2(0) = 1, \quad W_2'(0) = -3^{2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \quad W_2''(0) = 0, \quad ,W_2'''(0) = 1. \tag{3.4}$$

та

$$W_3(0) = 1, \quad W_3'(0) = W_3''(0) = W_3'''(0) = 0,$$

$$W_4(0) = 0, \quad W_4'(0) = 1, \quad W_4''(0) = W_4'''(0) = 0. \tag{3.5}$$

Теорема 1. *Розв'язками однорідного модельного рівняння (3.1), які задовольняють початковим умовам (3.4), (3.5) будуть функції*

$$W_1(t) = -3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t + \frac{1}{2}t^2 f_1(t), \quad W_2(t) = 1 - 3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)t + \frac{1}{6}t^3 f_2(t), \; W_3(t) = 1, \; W_4(t) = t, \tag{3.6}$$

де

$$f_1(t) \equiv 1 - \frac{1}{3\cdot4\cdot5}t^3 + \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}t^6 - \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}t^9 + \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}t^{12} - \cdots,$$

$$f_2(t) \equiv 1 - \frac{1}{3\cdot4\cdot5}t^3 + \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}t^6 - \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}t^9 + \frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}t^{12} - \cdots \quad (3.7)$$

Доведення. Розв'язок рівняння (3.1) шукаємо у вигляді ряду $W(t) = \sum_{r-0}^{\infty} a^r t^r$. Підставимо цей ряд у рівняння (3.1) і зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенях змінної t. Отримаємо розв'язок $W(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 f_1(t) + a_3 t^3 f_2(t)$, в якому функції $f_i(t)$ визначаються формулами (3.7). Задовольняючи поступово отриманий розв'язок початковим умовам (3.4) та (3.5), отримаємо розв'язки (3.6).

Скориставшись відомими асимптотичними формулами для функцій Ейрі-Дородніцина, отримаємо наступні асимптотичні формули для розв'язків $W_k(t)$ та їх похідних:

$$W_1(t) = -At^{-5/4}\left\{\cos\alpha\cdot\left[1+O\left(t^{-3}\right)\right] + \frac{41}{48}t^{-3/2}\sin\alpha\cdot\left[1+O\left(t^{-3}\right)\right]\right\},$$

$$(3.8)$$

$$W_2(t) = -Bt^{-5/4}\left\{\sin\beta\cdot\left[1+O\left(t^{-3}\right)\right] - \frac{41}{48}t^{-3/2}\cos\beta\cdot\left[1+O\left(t^{-3}\right)\right]\right\},$$

де A і B відомі величини (див. [7]).

Проведені дослідження показали, що для побудови наступних двох розв'язків рівняння (1) необхідно ввести в розгляд істотно особливу функцію (ІОФ), яка є розв'язком задачі

$$\widetilde{\mathbf{T}}\rho(t) = 1, \quad \rho(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0 \quad \rho''(0) = 3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \quad \rho'''(0) = -3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right). \quad (3.9)$$

Теорема 2. *Розв'язком задачі (3.9) є функція*

$$\rho(t) = t^2 3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\rho_2(t) - t^3 3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\rho_3(t) + t^4\rho_4(t), \quad (3.10)$$

де

$$\rho_2(t) \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}t^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}t^6 - \frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}t^9 + \frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}t^{12} - \cdots,$$

$$\rho_3(t) \equiv \frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}t^3 + \frac{1}{3\cdot4\cdot\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}t^6 - \frac{1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}t^9 + \cdots$$

$$\rho_4(t) \equiv \frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}t^3 + \frac{1}{2\cdot4\cdot\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}t^6 - \frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13}t^9 + \cdots$$

4. Простір безрезонансних розв'язків. Введемо в розгляд підпростори наступного вигляду:

$$Y_{rk} = \{V_{rk}(x)W_k(t) + Q_{rk}(x)W_k'(t) + M_{rk}(x)U_k(t) + N_{rk}(x)U_k'(t)\},$$

$$V_r = \{f_r(x)\rho(t) + g_r(x)\rho'(t) + m_r(x)\Psi(t) + n_r(x)\Psi'(t)\}, \qquad X_r = \{\omega_r(x)\}, \quad (4.1)$$

де $V_{rk}(x), Q_{rk}(x), M_{rk}(x), N_{rk}(x), f_r(x), g_r(x), m_r(x), n_r(x), \omega_r(x) \in C^\infty[0:1]$, а $\Psi''(t) \equiv \rho''(t)$.

З цих підпросторів складемо простір безрезонансних розв'язків (ПБР)

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{2} Y_{rk} \oplus V_r \oplus X_r . \qquad (4.2)$$

Елемент простору (4.2) має вигляд

$$y_r(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{rk}(x,t) + \beta_r(x,t), \qquad (4.3)$$

де

$$\alpha_{rk}(x,t) \equiv [V_{rk}(x)W_k(t) + Q_{rk}(x)W_k'(t) + M_{kr}(x)U_k(t) + N_{rk}(x)U_k'(t)] \in Y_{rk},$$
$$\beta_r(x,t) \equiv [f_r(x)\rho(t) + g_r(x)\rho'(t) + m_k(x)\Psi(t) + n_r(x)\Psi'(t) + \omega_r(x)] \in V_k \oplus X_r .$$

5. Регуляризація СЗДР. Дослідимо дію розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, записаного у вигляді рівності (2.2) на елемент простору (4.2). Процедура аналогічних перетворень для алгебраїчних та диференціальної точок звороту описано в працях [2-5]. Виходячи з сказаного, запишемо тільки кінцевий результат. Маємо

$$\widetilde{\mathbf{L}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} y(x,\varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{\mathbf{1}}(\varepsilon)\alpha_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_3(\varepsilon)\beta_r(x,t), \qquad \mathbf{R}_{\mathbf{k}} y(x,\varepsilon) \equiv \sum_{s=-2}^{3} \varepsilon^s \mathbf{R}_{rs}, \qquad k = 1,3 . \qquad (5.1)$$

Тут оператори $\mathbf{R}_{k\mathbf{s}}$, в їх дії на елементи $\alpha_{rk}(x,t) \in Y_{rk}$, можна записати у вигляді тотожностей

$$\mathbf{R}_{\mathbf{1(-2)}}\alpha_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{D}_{\mathbf{N}} N_{rk}(x)U_k(t), \qquad (5.2)$$

$$\mathbf{R}_{1(-1)}\alpha_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{P}_{\mathbf{Q}} Q_{rk}(x)U_k(t) - \mathbf{D}_{\mathbf{M}} M_{rk}(x)U_k'(t) + a(x)\mathbf{d}V_{rk}(x)W_k'(x), \qquad (5.3)$$

$$\mathbf{R}_{10}\alpha_{rk}(x,\varepsilon) \equiv [\varphi'(x)]^4 \varphi(x)Q_{rk}(x)U_k'(t) + \mathbf{L}_{\mathbf{Q}}[V_{rk}(x)W_k(t) + Q_{rk}(x)W_k'(t)] +$$
$$+ \mathbf{L}_{\mathbf{1}} V_{rk}(x)U_k'(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{M}} M_{rk}(x)U_k(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{N}} N_{rk}(x)U_k'(t), \qquad (5.4)$$

де

$$-\mathbf{D}_{\mathbf{M}} \equiv -2[\varphi'(x)]^3 \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x)[6 - \varphi'(x)] - 2[\varphi'(x)]^4,$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{N}} \equiv -2[\varphi'(x)]^3 \varphi^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi^2(x)\varphi'(x)\varphi''(x)[6 - \varphi'(x)] + 3\varphi(x)[\varphi'(x)]^4, \qquad (5.5)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Q}} \equiv a(x)\mathbf{d} - [\varphi'(x)]^4 - \varphi(x)\mathbf{L}_{\mathbf{1}}, \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{L}_{\mathbf{0}} - \mathbf{L}_{\mathbf{1}} - \varphi(x)\mathbf{L}_{\mathbf{2}}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{L}_{\mathbf{0}} + 2\mathbf{L}_{\mathbf{1}} - \varphi(x)\mathbf{L}_{\mathbf{2}}. \qquad (5.6)$$

Оператори $\mathbf{R}_{\mathbf{3s}}$ в їх дії на елемент $\beta_{rk}(x,t) \in V_r \oplus X_r$ зображуються формулами

$$\mathbf{R}_{\mathbf{3(-2)}}\beta_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{D}_{\mathbf{N}} n_r(x)\Psi(t), \qquad (5.7)$$

$$\mathbf{R}_{3(-1)}\beta_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{P}_{\mathbf{Q}} g_r(x)\Psi(t) - \mathbf{D}_{\mathbf{M}} m_r(x)\Psi'(t) + a(x)\mathbf{d}f_r(x)\rho'(x), \qquad (5.8)$$

$$\mathbf{R}_{30}\beta_{rk}(x,\varepsilon) \equiv [\varphi'(x)]^4 \varphi(x)g_r(x)\Psi'(t) + \mathbf{L}_{\mathbf{Q}}[f_r(x)\Psi(t) + g_r(x)\rho'(t)] +$$
$$+ \mathbf{L}_{\mathbf{1}} f_r(x)\Psi'(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{M}} m_r(x)\Psi(t) + \mathbf{P}_{\mathbf{N}} n_r(x)\psi'(t) + \mathbf{L}_{\mathbf{0}}\omega_r(x). \qquad (5.9)$$

Інші оператори будуть відігравати другорядну роль і за необхідністю легко виписати їх явний вигляд в дії на відповідні функції.

Висновки 2.1. Отримані тотожності (5.1)-(5.9) показали, що підпростори Y_{rk} та $V_r \oplus X_r$, а отже і ПБР (4.2) інваріантні відносно розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon}$.

2.2. Оскільки кожний з підпросторів Y_{rk} та $V_r \oplus X_r$ окремо інваріантні відносно розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon}$, то частинні розв'язки можемо будувати незалежно один від другого у відповідних підпросторах.

6. Про існування гладких розв'язків диференціальних рівнянь. Для наступних досліджень необхідно вивчити питання про існування досить гладких розв'язків диференціальних рівнянь

$$\mathbf{D_M} M_{rk}(x) \equiv f_{Mrk}(x), \qquad \mathbf{D_N} N_{rk}(x) \equiv f_{Nrk}(x), \tag{6.1}$$

Праві частини яких є досить гладкими функціями коли $x \in [0;1]$.

Спочатку запишемо розв'язок однорідних рівнянь (6.1). Маємо

$$M_{\text{îäí}\,.}(\mathrm{x}) = \exp\left\{\int^{x}\left[-x^{-1} + \gamma_M(x)\right]dx\right\}, \qquad N_{\text{îäí}\,.}(\mathrm{x}) = \exp\left\{\int^{x}\left[-x^{-3/2} + \gamma_N(x)\right]dx\right\},$$

де $\gamma_M(x)$ та $\gamma_N(x)$ – досить гладкі функції коли $x \in [0;1]$. З отриманих рівностей бачимо, що не існує гладких розв'язків рівнянь (6.1) в околі точки звороту $x = 0$. Дослідимо частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (6.1). Точка звороту $x = 0$ є регулярною особливою точкою для першого рівняння (6.1). Тому існує досить гладкий розв'язок цього рівняння на всьому відрізку $[0;1]$, причому $M_{rk}(0) = f_{Mrk}(0) \cdot \left(2[\varphi'(0)]^4\right)^{-1}$.

Для другого рівняння (6.1) точка звороту $x = 0$ є іррегулярною особливою точкою. Проведені дослідження показали наступне. Якщо права частина цього рівняння задовольняє умові $f_{Nrk}(x) = x \cdot \widetilde{N}_{rk}(x)$, де $N_{rk}(x)$ є аналітична функція на всьому відрізку $[0;1]$, то існує досить гладкий частинний розв'язок всьому відрізку $[0;1]$, причому $N_{rk}(0) = 3^{-1}\widetilde{N}_{rk}(0) \cdot [\varphi'(0)]^{-5}$.

Висновок 3. У процесі побудови рівномірної асимптотики розв'язку розширеного рівняння (2.1) можна буде використовувати тільки частинні розв'язки першого диференціального рівняння (6.1). Частинні розв'язки другого диференціального рівняння (6.1) теж можна буде використовувати за умови, що точка $x = 0$ буде нулем їх правих частин. У процесі побудови рівномірної асимптотики розв'язку розширеного рівняння (2.1) буде показано, що ця умова буде досягнута на кожному ітераційному кроці за рахунок довільних сталих, отриманих при інтегрування диференціальних рівнянь відносно функцій $V_{rk}(x)$ та $Q_{rk}(x)$.

7. Формалізм побудови розв'язків розширеного рівняння у підпросторах Y_{rk}. Скориставшись результатами попередніх двох пунктів, перейдемо до побудови розв'язків розширеного рівняння у підпросторах

Y_{rk}, $k=1{,}2$. Два розв'язки рівняння (2.1) у підпросторах Y_{rk} будуємо у вигляді рядів

$$Y_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\alpha_{rk}(x,t), \qquad \alpha_{rk}(x,t)\in \mathrm{Y_{rk}}, \qquad \mathrm{k}=1{,}2. \tag{7.1}$$

Підставимо ряди (7.1) в однорідне рівняння (2.1). та скористаємось рівностями (5.1)-(5.5). Зрівнявши коефіцієнти біля однакових ІОФ, отримаємо рівняння

$$A_{rk}W_k(x,\varepsilon)\equiv \mathbf{L_0}V_{rk}(x)+\varepsilon^3 V_{rk}{}^{(4)}(x)=0, \tag{7.2}$$

$$A_{rk}W_k{}'(x,\varepsilon)\equiv \varepsilon^{-1}a(x)dV_{rk}(x)+\mathbf{L_0}Q_{rk}(x)+\varepsilon^2\mathbf{L_3}V_{rk}(x)+\varepsilon^3 Q_{rk}{}^{(4)}(x)=0, \tag{7.3}$$

$$A_{rk}U_k(x,\varepsilon)\equiv \varepsilon^{-2}\mathbf{D_N}N_{rk}(x)dV_{rk}(x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{P_Q}Q_{rk}(x)+\mathbf{P_M}M_{rk}(x)-$$

$$-\varepsilon[\mathbf{L_2}+\varphi(x_3)\mathbf{L_3}]N_{rk}(x)-\varepsilon\mathbf{L_2}V_{rk}(x)+\varepsilon^2\mathbf{L}_3Q_{rk}(x)+\varepsilon^3 M_{rk}{}^{(4)}(x)=0, \tag{7.4}$$

$$A_{rk}U_k{}'(x,\varepsilon)\equiv -\varepsilon^{-1}\mathbf{D_M}M_{rk}(x)+P_N N_{rk}(x)+$$

$$+\mathbf{L_1}V_{rk}(x)+\varepsilon\,\mathbf{L_2}Q_{rk}(x)+\varepsilon^2\mathbf{L_3}M_{rk}(x)+\varepsilon^3 N_{rk}{}^{(4)}(x)=0. \tag{7.5}$$

Серія рекурентних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $V_{rk}(x)$ і $Q_{rk}(x)$ не залежать від інших функцій (див. (7.2), (7.3)). Тому спочатку дослідимо рівняння (7.2) і (7.3). З рівняння (7.2) можна визначити тільки функції $V_{rk}(x)$. Тому з рівнянь (7.3) потрібно визначити функції $Q_{rk}(x)$.

Для визначення цих функцій отримаємо рекурентну систему рівнянь (к=1.2)

$$\mathbf{L_0}V_{rk}(x)=0, \quad r=0{,}1{,}2, \qquad \mathbf{L_0}V_{rk}(x)=-V^{(4)}_{(r-3)k}(x), \quad r\ge 3, \tag{7.6}$$

$$\mathbf{L_0}Q_{rk}(x)=-a(x)\mathbf{d}V_{(r+1)k}(x)-\mathbf{L_3}V_{(r-2)k}(x)-Q_{(r-3)k}{}^{(4)}(x), \qquad \mathbf{d}V_{0k}(x)=0. \tag{7.7}$$

Оскільки функції $V_{rk}(x)$ визначаються з рівнянь (7.6), то рівняння $\mathbf{d}V_{0k}(x)=0$ вже непридатне для визначення досить гладких, не рівних тотожно нулю, цих функцій. Тому для забезпечення існування розв'язків системи (7.7) необхідно взяти $V_{0k}(x)\equiv 0$. Оскільки в (7.6) маємо однорідні диференціальні рівняння $\mathbf{L_0}V_{rk}(x)=0$, то ця умова буде виконана.

Розв'язуючи поступово серію диференціальних рівнянь (7.6) і (7.7), нами будуть визначені досить гладкі на всьому відрізку $[0;1]$ функції

$$V_{0k}(x)\equiv 0, \qquad V_{rk}(x)=V^0_{rk}\cdot x\cdot\widetilde{\omega}_1(x), \quad r=1{,}2{,}3,$$

$$V_{rk}(x)=V^0_{rk}\cdot x\cdot\widetilde{\omega}_1(x)+V^{\div\grave{a}\tilde{n}\grave{o}.}_{rk}(x), \quad r\ge 4, \qquad Q_{rk}(x)=Q^0_{rk}\cdot x\cdot\widetilde{\omega}_1(x)+Q^{\div\grave{a}\tilde{n}\grave{o}.}_{rk}(x), \quad r\ge 0,$$

де $V_{rk}{}^0(x)$ і $Q_{rk}{}^0(x)$ – довільні постійні, отримані при інтегруванні. Ці сталі у майбутньому будуть використані для забезпечення існування досить гладких розв'язків диференціальних рівнянь відносно функцій $N_{rk}(x)$.

Легко перевірити, що $Q_{rk}(x)=0$ коли $r=0{,}1{,}2$. Обчислимо значення правої частини рівняння (7.7) коли $r=3$ у точці звороту $x=0$. Маємо

$H_{3Qk}(0)=4V_{1k}^{0}\cdot[-3\varphi'(0)+\varphi'''(0)]$. Тут і надалі врахована рівність $\widetilde{\omega}(0)=1$. Тоді $Q_{3k}(0)=4V_{1k}^{0}\cdot b^{-1}(0)[-3\varphi'(0)+\varphi'''(0)]=V_{1k}^{0}q_{3k}(0)$.

Отже при виконанні умови $-3\varphi'(0)+\varphi'''(0)\neq 0$ отримаємо, що $Q_{3rk}(0)\neq 0$. Ці умови у майбутньому будуть нами використані. Для того, щоб $-3\varphi'(0)+\varphi'''(0)=0$ потрібно, щоб $\widetilde{a}(0)$ задовольняло досить складній умові, тобто умові $75\sqrt[3]{\widetilde{a}(0)}\cdot\widetilde{a}''(0)-48[\widetilde{a}'(0)]^{2}-525\sqrt[3]{\widetilde{a}^{4}(0)}=0$. Виходячи з наведеного можна зробити висновок, що практично умова $-3\varphi'(0)+\varphi'''(0)=0$ буде завжди виконуватись.

Дослідимо наступну рекурентну систему диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{D_M}M_{rk}(x)=H_{Mrk}(x),\qquad \mathbf{D_N}N_{rk}(x)=H_{Nrk}(x),\qquad k=1,2. \tag{7.8}$$

Скориставшись тотожностями (7.4)-(7.5), при необхідності легко виписати явний вигляд правих частин цих рівнянь. Рівняння (7.8) мають відповідно регулярну і іррегулярну особливу точку звороту $x=0$. Тому основна задача полягає в тому, щоб показати, що серія рекурентних диференціальних рівнянь (7.8) має досить гладкі розв'язки на всьому відрізку $[0;1]$, включаючи і точку звороту $x=0$. Для цього необхідно детально проаналізувати праві частини рівнянь (7.8).

Коли $r=0$, то маємо гладкі розв'язки $M_{0k}(x)\equiv N_{0k}(x)\equiv 0$.

Коли $r=1;2$ отримаємо відповідно системи диференціальних рівнянь

$$\mathbf{D_M}M_{rk}(x)=P_N N_{(r-1)rk}(x),\quad \mathbf{D}_N N_{rk}(x)=-\left[x\widetilde{a}(x)\mathbf{d}+\varphi(x)\mathbf{L_0}+[\varphi'(x)]^{4}\right]Q_{(r-1)rk}(x)\equiv H_{Nrk}(x). \tag{7.9}$$

З першого однорідного рівняння коли $r=1$ визначимо досить гладкі розв'язки $M_{1k}(x)\equiv 0$. Функції $M_{2k}(0)=m_{2k}(0)Q_{2k}^{0}$, де значення $m_{2k}(0)$ при необхідності легко виписати. Дослідимо праву частину другого рівняння (7.9). Легко перевірити,що праву частину можна записати у вигляді $H_{Nrk}(x)=x\cdot\widetilde{H}_{Nrk}(x)$. Отже, існують досить гладкі частинні розв'язки $N_{rk}(x)$, не рівні тотожно нулю. Провівши аналогічні обчислення для рівнянь (7.8) коли $r=3$ ми знову визначимо досить гладкі частинні розв'язки $M_{3k}(x)$ та $N_{3k}(x)$.

Дослідимо наступний блок диференціальних рівнянь (7.8) коли $r=4$. Ми зразу визначимо досить гладкі частинні розв'язки $M_{4k}(x)$. Для визначення розв'язку другого рівняння з цього блоку знову необхідно дослідимо праву частину цього рівняння. Врахувавши явний вигляд операторів (5.6), отримаємо

$H_{N4k}(0)=-A_kV_{1k}^{0}+B_kQ_{0k}^{0}$, де V_{1k}^{0} та B_k - довільні сталі, а A_k і B_k – однозначно визначені сталі.

Гладкі частинні розв'язки $M_{4k}(x)$ та $N_{4k}(x)$ отримаємо за рахунок того, що функції $V_{1k}(x)$ та $Q_{0k}(x)$ містять довільні сталі інтегрування. Оскільки наша задача полягає у побудові лінійно незалежних розв'язків, то ці сталі можемо взяти рівними одиниці.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні диференціальні рівняння (7.8) коли $r > 4$, на кожному кроці за рахунок відповідних довільних сталих буде забезпечено існування досить гладких частинні розв'язків цих рівнянь.

Теорема 3. *Нехай: а) виконуються умови (2), (3); б)* $3\varphi'(0) \neq \varphi'''(0)$. *Тоді при досить малих значеннях параметру* $\varepsilon > 0$*:*

1) *ввівши нову додаткову змінну* $t = \varepsilon^{-1}\varphi(x)$*, де* $\varphi(x)$ *визначається формулою (3.3), СЗДР (1) за описаним алгоритмом можна поставити у відповідність розширене рівняння (2.1);*
2) *два розв'язки розширеного рівняння (2.1) можна записати у вигляді формальних рядів (7.1), коефіцієнти яких відповідно належать підпросторам* Y_{rk}, $r > 0, \quad k = 1;2$.

8. Формалізм побудови розв'язків розширеного рівняння у підпросторах $V_r \oplus X_r$**.** Розв'язки неоднорідного розширеного рівняння (2.1) у підпросторах $V_r \oplus X_r$ будуємо у вигляді ряду

$$\widetilde{U}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \beta_r(x,t), \text{ де } \beta(x,t) \in V_r \oplus X_r. \tag{8.1}$$

Підставимо цей ряд у розширене рівняння (2.1) та прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенях малого параметру. Тоді отримаємо серії рівнянь, які будуть аналогічні до рівнянь у підпросторах Y_{rk}. Так наприклад отримаємо таку рекурентну систему рівнянь (див. (7.6) та (7.7))

$$\mathbf{L}_0 f_r(x) = 0, \quad \mathrm{r} = 0;1;2, \quad \mathbf{L}_0 f_r(x) = -f_{(r-3)}^{(4)}(x), \quad \mathrm{r} \geq 3,$$

$$\mathbf{L}_0 f_r(x) = -a(x)\mathbf{d} f_{(r+1)}(x) - \mathbf{L}_3 f_{(r-2)}(x) - g(4)_{(r-3)}(x),$$

причому кожне з цих рівнянь теж не залежить від інших рівнянь.

Відносно невідомих функцій $m_r(x)$ та $n_r(x)$ отримаємо рекурентну систему рівнянь $\mathbf{D_M} m_r(x) = H_{mr}(x), \quad \mathbf{D_N} n_r(x) = H_{nr}(x)$, (див. (7.8) праві частини яких при необхідності теж легко виписати.

Зупинимось на дослідженні рівнянь

$$\begin{aligned} A_\omega(x,\varepsilon) \equiv h(x) + \varepsilon^{-1}[\varphi'(x)]^4 f_r(x) - 3[\varphi'(x)]^4 n_r(x) + a(x)\mathbf{d} n_r(x) + \mathbf{L_0}\omega_r(x) + \\ + \mathbf{L_1} g_r(x) + \varepsilon \mathbf{L_2} m_r(x) + \varepsilon^2 \mathbf{L_3} n_r(x) + \varepsilon^3 \omega_r^{(4)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

аналоги яких не було у попередньому пункті. Зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенях малого параметру. Розв'язок отриманої системи рівнянь шукаємо у вигляді $\omega_r(x) = z_r(x) + y_r(x)$. Тут $z_r(x)$ будуть розв'язки, з яких утвориться четвертий лінійно незалежний розв'язок СЗДР (1), а з $y_r(x)$ отримаємо частинний розв'язок неоднорідного СЗДР (1). Для визначення цих функцій отримаємо систему рівнянь

$$\mathbf{L_0} z_0(x) = -\mathbf{L}_1 g_0(x) - [\varphi'(x)]^4 f_1(x) - \left[3[\varphi'(x)]^4 + a(x)\mathbf{d}\right] \cdot n_1(x), \quad \mathbf{L_0} z_r(x) = H_r(x), \quad \mathrm{r} \geq 1,$$

$$\mathbf{L_0} y_0(x) = h(x) \ , \quad \mathbf{L_0} y_r(x) = 0\,, \ \ r = 1;2, \qquad \mathbf{L_0} y_r(x) = -{y_{r-3}}^{(4)}(x), \ \ r \ge 3 \ . \qquad (8.3)$$

Розв'язуючи рівняння (8.3), розв'язок (8.1) можна записати у вигляді таких двох рядів

$$Y_3(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[f_r(x)\rho(t) + g_r(x)\rho'(t) + m_r(x)\Psi(t) + n_r(x)\Psi'(t) + z_r(x)\right],$$

$$Y_4(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r y_r(x).(8.4)$$

Теорема 4. *Нехай: а) виконуються умови (2) і (3); б)* $3\varphi'(0) \ne \varphi'''(0)$. *Тоді для досить малих значень параметра* $\varepsilon > 0$ *у підпросторах* $V_r \oplus X_r$ та X_r *можна побудувати два розв'язки розширеного рівняння (2.1) у вигляді формальних рядів (8.4).*

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотическое разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968.
2. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. Київ. Наукова думка. 2002.
3. Бобочко В. Н. Уравнение Орра-Зоммерфельда с дифференциальной точкой поворота. // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 171–179.
4. Бобочко В.Н. Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. 11 // Известия вузов. Математика. – 2002. – №5. – С. 3–12.
5. Бобочко В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. // Известия вузов. Математика. – 2006. – №5 . – С. 8–18.
6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981.