УДК 532.59

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ТРИШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

О.В.Авраменко, В.В.Нарадовий, Н.Ю.Пасєка

Отримано умову поширення у тришаровій гідродинамічній системі хвиль, що біжать вздовж двох поверхонь контакту та вільної поверхні.

Conditions of travelling wave propagation along two interfaces and free surface in three-fluid layer system were obtained.

1. Вступ. Поширення та стійкість хвильових пакетів на поверхні контакту півнескінченних рідин вперше дослідив Найфе [16]. У статті [15] аналітично досліджується хвилі на поверхні контакту двох рідких півпросторів, за умови що одна із рідин в'язка. Відмітимо також роботи [17], [20], [10], [19], [12].

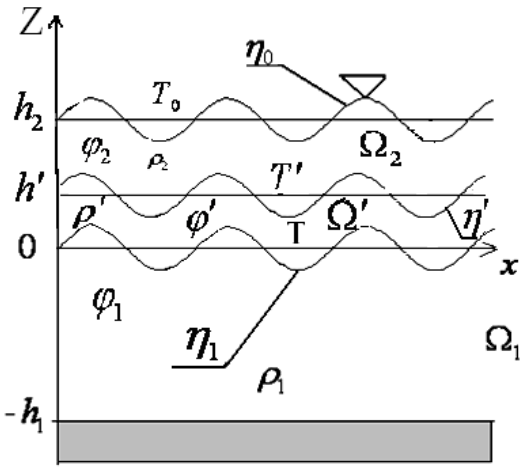
Особливий інтерес викликають дослідження не тільки поширення окремих хвильових пакетів, а і взаємодію внутрішніх та поверхневих хвиль. Наближення «твердої кришки» достатньо обґрунтоване в рамках окремих моделей хвильових рухів, але межі його достовірності для гравітаційно-капілярних хвиль в рамках слабко нелінійної моделі також становить значний інтерес.

Проведено дослідження генерації внутрішніх хвиль поверхневими у роботі [18]. Поширення гравітаційно-капілярних поверхневих хвиль за наявності генерації внутрішніх хвиль великої амплітуди розглянуто к короткохвильовому наближенні [11]. У статті [3] вивчено взаємодію поверхневих та внутрішніх хвиль зі збуреннями, що пересуваються. Вивчається поширення коротких поверхневих хвиль з використанням променевої торії для лінійних хвиль, так і повного нелінійного чисельного розв'язку. Досліджено нелінійні внутрішні хвилі та солітони у шельфовій зоні Японського моря [9]. Виявлено основні закономірності направленості поширення внутрішніх хвиль на шельфі та поблизу материкового схилу. Розв'язки другого порядку для внутрішніх та поверхневих хвиль у двошаровій рідкій системі отримано методом збурень [13].

У статті [14] взаємодія між короткими поверхневими та довгими внутрішніми хвилями у двошаровій рідині досліджено методом багатомасштабних розвинень. Особливості поширення та структура хвильових пакетів, умови стійкості та форма обвідної хвильових пакетів різних гідродинамічних системах досліджуються методом багато масштабних розвинень у статтях [1], [2] , [4], [6], [7]. У роботі [8] розглядається нова слабко нелінійна задача поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі, яка складається з двох рідин з різними властивостями, верхня з яких обмежена згори вільною поверхнею.

У даній роботі розглядається задача поширення хвиль у гідродинамічній системі, яка складається з трьох рідин з різними властивостями, верхня з яких обмежена згори вільною поверхнею. Вивчаються умови поширення хвильових пакетів на вільній поверхні та на обох поверхнях контакту рідких шарів. На всіх трьох поверхнях враховується сила поверхневого натягу середовищ із урахуванням поверхневого натягу.

2. Постановка задачі. Досліджується проблема поширення хвиль, що біжать, кінцевої амплітуди на поверхні контакту нижнього рідкого шару $\Omega_1 = \{(x,z): -\infty < x < \infty, -h_1 \le z \le 0\}$ з густиною ρ_1, середнього рідкого шару $\Omega' = \{(x,z): -\infty < x < \infty, 0 \le z \le h'\}$ з густиною ρ' та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x,z): -\infty < x < \infty, h' \le z \le h_2\}$ з густиною ρ_2. Нижній та середній шари розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x,t)$, середній та верхній шари розділені поверхнею контакту $z = \eta'(x,t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z = \eta_0(x,t)$.



При розв’язанні враховуємо силу поверхневого натягу на поверхнях контакту та на вільній поверхні з коефіцієнтами поверхневого натягу T, T' та T_0. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу від’ємному z-напрямку.

Сформулюємо математичну постановку задачі у рамках лінійної теорії. Швидкість поширення пакетів у виражаються через градієнти потенціалів і тому потенціали повинні задовольняти рівнянням Лапласа у відповідних областях

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \text{в } \Omega_1,\\
&\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad \text{в } \Omega_2,\\
&\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0, \quad \text{в } \Omega'.
\end{aligned} \tag{1}$$

Кінематичні та динамічні умови на поверхнях контакту та на вільній поверхні перенесемо на відповідні незбурені площини

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} = \mathrm{h}', \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} = \mathrm{h}', \tag{3}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} = \mathrm{h}_2, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \eta_0 - \frac{T_0}{\rho}\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{z} = \mathrm{h}_2, \tag{7}$$

$$\rho''\frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (\rho'' - \rho)\eta' - T'\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{z} = \mathrm{h}', \tag{8}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho''\frac{\partial \phi'}{\partial t} + (1 - \rho'')\eta_1 - T\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{z} = 0\,, \tag{9}$$

на дні виконується умова не протікання

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1. \tag{10}$$

3. Аналітичний розв’язок та дисперсійне співвідношення. Розв’язок задачі (1)-(10) знайдено методом невизначених коефіцієнтів, у вигляді хвиль, що біжать, у формі

$$\varphi_1 = \left(ae^{i\theta} + \bar{a}e^{-i\theta}\right)\mathrm{ch}\,k(h_1 + z) + \left(be^{i\theta} + \bar{b}\,e^{-i\theta}\right)\mathrm{sh}\,k(h_1 + z), \tag{11}$$

$$\varphi' = \left(ce^{i\theta} + \bar{c}e^{-i\theta}\right)\mathrm{ch}\,k(h' - z) + \left(de^{i\theta} + \bar{d}e^{-i\theta}\right)\mathrm{sh}\,k(h' - z), \tag{12}$$

$$\varphi_2 = \left(fe^{i\theta} + \bar{f}e^{-i\theta}\right)\mathrm{ch}\,k(h_2 - z) + \left(ge^{i\theta} + \bar{g}e^{-i\theta}\right)\mathrm{sh}\,k(h_2 - z), \tag{13}$$

де $\theta = kx - \omega t$, k – хвильове число центру хвильового пакету, ω – частота центру хвильового пакету.

Підставляючи (11) в (4) та враховуючи (10), маємо

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \left(ae^{i\theta} + \bar{a}e^{-i\theta}\right)\mathrm{sh}(kh_1)\,,$$

звідки отримуємо вираз для відхилення нижньої поверхні контакту

$$\eta_1 = k\,\mathrm{sh}(kh_1)\left(\frac{iae^{i\theta}}{\omega} - \frac{i\overline{a}e^{-i\theta}}{\omega}\right).$$

Введемо позначення $A = \dfrac{ik\,\mathrm{sh}(kh_1)}{\omega}a$, $\overline{A} = -\dfrac{ik\,\mathrm{sh}(kh_1)}{\omega}\overline{a}$ та запишемо відхилення поверхні контакту η_1 та потенціал швидкостей φ_1 у нижньому шарі Ω_1

$$\eta_1 = Ae^{i\theta} + \overline{A}e^{-i\theta}, \tag{14}$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega}{ik}\left(Ae^{i\theta} - \overline{A}e^{-i\theta}\right)\frac{\mathrm{ch}\,k(h_1 + z)}{\mathrm{sh}(kh_1)}. \tag{15}$$

Підставимо (14) і (15) в (5), (9). Отримаємо систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів c і d.

$$\begin{cases} c\,\mathrm{sh}(kh')k + d\,\mathrm{ch}(kh')k = -i\omega A, \\ i\rho''\omega c\,\mathrm{ch}(kh') + i\rho''\omega d\,\mathrm{sh}(kh') = \dfrac{1}{k}\left(\omega^2\,\mathrm{cth}(kh_1) - (k - \rho''k + Tk^3)\right)A. \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо невідомі коефіцієнти c і d у вигляді

$$\begin{cases} c = \left(\dfrac{i\omega}{k\,\mathrm{sh}(kh')} + \dfrac{i}{k}\lambda\,\mathrm{cth}(kh')\right)A, \\ d = -\dfrac{i}{k}\lambda A, \end{cases}$$

де $\lambda = \dfrac{\omega^2\,\mathrm{cth}(kh_1) - (k - \rho''k + Tk^3) + \rho''\omega^2\,\mathrm{cth}(kh')}{\rho''\omega\,\mathrm{sh}(kh') - \rho''\omega\,\mathrm{ch}(kh')\,\mathrm{cth}(kh')}$.

Отже, потенціал φ' у середньому шарі має вигляд

$$\phi' = \left[\left(\frac{i\omega}{k\,\mathrm{sh}(kh')} + \frac{i}{k}\lambda\,\mathrm{cth}(kh')\right)\mathrm{ch}(k(h'-z)) - \frac{i}{k}\lambda\,\mathrm{sh}(k(h'-z))\right]\left(Ae^{i\theta} - \overline{A}e^{-i\theta}\right). \tag{16}$$

Тепер, легко знайти η', для цього підставимо у формулу (2) вираз для φ' (16). Отримаємо, що

$$\eta' = -\frac{\lambda}{\omega}\left[Ae^{i\theta} + \overline{A}e^{-i\theta}\right]. \tag{17}$$

Підставляючи (16), (17) в (3), (8) знаходимо вираз для потенціалу швидкостей φ_2 у верхньому шарі

$$\phi_2 = \left\{ -\frac{i\lambda}{k\,\mathrm{sh}(k(h_2 - h'))} - M\,\mathrm{cth}(k(h_2 - h')) \right\} \mathrm{ch}(k(h_2 - z)) \left(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta} \right) +$$

$$+ M\,\mathrm{sh}(k(h_2 - z)) \left(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta} \right),$$

де

$$M = \left[\frac{K - \dfrac{\lambda\rho\omega\,\mathrm{cth}(k(h_2 - h'))}{k}}{\left[i\rho\omega\,\mathrm{sh}(k(h_2 - h')) - \rho\omega\,\mathrm{cth}(k(h_2 - h'))\,\mathrm{ch}(k(h_2 - h')) \right]} \right],$$

$$K = \left[-\rho'' \left(\frac{\omega}{k\,\mathrm{sh}(kh')} + \frac{\lambda\,\mathrm{cth}(kh')}{k} \right) \omega + \frac{(\rho'' - \rho)\lambda}{\omega} + \frac{T' k^2 \lambda}{\omega} \right].$$

Підставляючи знайдений вираз для φ_2 в (6) отримуємо вираз для відхилення вільної поверхні η_0

$$\eta_0 = -\frac{ikM}{\omega} \left(Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta} \right).$$

Підставляючи знайдені розв’язки в (7) отримуємо дисперсійне рівняння, що пов’язує між собою частоту та хвильове число

$$-\frac{\lambda\omega}{k\,\mathrm{sh}(k(h_2 - h'))} + iM \left(\omega\,\mathrm{cth}(k(h_2 - h')) + \frac{k\rho + T_0 k^3}{\omega} \right) = 0.$$

Дисперсійне рівняння задає умови поширення лінійно стійких хвильових пакетів у розглядуваній гідродинамічній системі.

Достовірність отриманого дисперсійного співвідношення підтверджують виконання відповідних граничних переходів та порівняння його з аналогічними результатами для гідродинамічних систем «шар-шар» [8], «півпростір-півпростір» [5], «півпростір з вільною поверхнею» [10].

4. Висновки. Проведено дослідження тришарової гідродинамічної системи з вільною поверхнею, отримано розв’язки у вигляді хвиль, що біжать, а також знайдено відповідне дисперсійне рівняння.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В., Нарадовий В.В. Умови стійкості хвильових пакеті у двошаровій рідині з вільною поверхнею. // Наукові записки.– Випуск 67. – Серія: Математичні науки: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – С. 3–7.

2. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладна гідромеханика.– 2002.– Т.4(76), №4.– С.3–13.

3. Гримшоу Р., Пелиновский Е. Н. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с бегущими возмущениями //ДАН. 1995. Т. 344. С. 394–396.

4. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– 44, №2. – С. 113–122.

5. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханика.– 2001.– Т.3(75), №.4.– С.38–46.

6. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Том 7(79), № 1. – С. 80–89.

7. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе //Прикладна гідромеханіка. – 2006, – 8(90), №4. – С.60–65.

8. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В., Нарадовый В.В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методы та физ.-мехю поля. – 2009. – 52, №1. – С. 72–83.

9. Серебряный А.Н., Фурдуев А.В., Аредов А.А., Охрименко Н.Н. Шум внутренней волны большой амплитуды в океане // Доклады АН. 2005.– Т. 402. № 4.– С. 543–547.

10. Ablowitz, M.J. , Segur, H. Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Maths.– 1980.–62.– P. 249–262 [10]

11. Bakhanov V.V, Kropfli R.A., Ostrovsky L.A. On the effect of strong internal waves on surface waves // Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1999. IGARSS apos; 99 Proceedings. IEEE 1999 International Volume 1, 1999, vol.1.– Pp. 170 – 172

12. Bhatnagar P.L. Nonlinear waves in one–dimensional dispersive systems.– Oxford: Clarendon Press, 1979. [12]

13. Chi-Min Liu Second-order random internal and surface waves in a two-fluid system // Geophisical research letters, Vol. 33, L06610 doi:10.1029/2005GL025477, 2006

14. Hashizume Y. Interaction between Short Surface Waves and Long Internal Waves // Journal of the Physical Society of Japan.– Vol.48, No.2(19800215) pp. 631–638

15. Lu D. Q., Chwang A. T. Interfacial waves due to a singularity in a system of two semi-infinite fluids // Phys. Fluids. – 2005. – 17. – P. 102107–1–102107–9.

16. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.– 1976.– 43, N4.– P. 584–588.

17. Segur H., Hammack J.L. Soliton models of long internal //J.Fluid Mech.– 1982.– 118.– P. 285–304. [8]

18. Watson K.M. The coupling of surface and internal gravity waves^ revised // J/ of Phis. Oceanography.– 1990, Vol. 20.– Pp.1233–1248.

19. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves.–New York: J. Wiley & Sons Inc., 1980.–636 p.

20. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water waves // Advances in Appl. Mech.– New York, London.– 1982.– 22.–P. 33–45.