

19. Романов В.А. О неэквивалентности трех определенных непрерывных направлений для векторных мер // Математические заметки Российской Академии наук. – 1995. – 57, № 2. – С. 310-312.

УДК 512.552.1

## МІНОРИ БАГАТОРЯДНИХ КУСКОВИХ ОБЛАСТЕЙ

*Ю. В. ЯРЕМЕНКО, Т. М. ЖЕРДІЙ*

Описано мінори третього та четвертого порядку багаторядних кускових областей.

The minors of orders 3 and 4 of multiserial piecewise domains are described.

Одним з основних понять теорії кілець та модулів є поняття простого модуля, тобто модуля, у якого решітка усіх підмодулів є двоелементним ланцюгом. Класично напівпрості кільця характеризуються тим, що усі модулі над ними напівпрості, тобто розкладаються в прямі суми простих модулів. Кільця, над якими всі нерозкладні модулі прості, охарактеризовані класичною теоремою Веддербарна-Артина.

Більш широкий клас модулів – клас ланцюгових модулів розглядали Кете, Асано, Накаяма, Скорняков і ін. Відповідним розширенням класу напівпростих модулів є напівланцюгові модулі, тобто прямі суми ланцюгових модулів.

Узагальнено однорядні артинові кільця, тобто напівланцюгові артинові кільця вперше ввів Накаяма [1]. У цій роботі він довів, що над такими кільцями всі модулі напівланцюгові. Скорняков довів, що й навпаки, якщо будь-який модуль над деяким кільцем є напівланцюговим, то це – артинове напівланцюгове кільце [2].

Поняття артинового бірядного кільця введено Фуллером в роботах [3] у зв'язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. Клас артинових бірядних кілець містить узагальнено однорядні кільця Накаями [1], розщепимі групові алгебри скінченного модульного типу та кільця дистрибутивно модульного типу.

У роботі [4] введені бірядні напівдосконалі кільця без будь-яких обмежень скінченності. Структура спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей вказана в роботах [5,6]. Серед кускових бірядних областей виділені кільця модульно обмеженого типу. Показано, що кускові бірядні області модульно обмеженого типу – це в точності напівдосконалі кускові області дистрибутивно модульного типу.

Важливим узагальненням напівланцюгових та бірядних кілець є багаторядні кільця [7].

При вивченні напівланцюгових, бірядних та багаторядних кілець широко використовується метод сагайдаків.

Вперше поняття сагайдака напівдосконалого кільця було застосовано для характеристики нетерових напівланцюгових кілець. В цьому випадку сагайдаки повністю характеризують такі кільця. Складніші класи напівдосконалих кілець вже не завжди повністю характеризуються будовою сагайдаків, але в багатьох випадках властивості сагайдаків дають важливу інформацію про будову кілець.

Ми будемо використовувати поняття первинного сагайдака напівдосконалого кільця, введене В.В. Кириченко у роботі [8].

У статті розглядаються асоціативні кільця з  $I \neq 0$ .

Кільце  $A$  називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце  $A/R$  артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона  $R$  [9].

*Ідемпотенти можна піднімати за модулем ідеала  $I$* , якщо з того, що  $q^2 - q \in I$  ( $q \in A$ ), випливає існування ідемпотента  $e^2 = e \in I$  такого, що  $e - q \in I$ .

**Теорема 1.** *Кільце напівдосконале тоді і тільки тоді, коли  $I \in A$  розкладається в суму попарно взаємноортогональних локальних ідемпотентів.*

Нерозкладний модуль  $M$  називається  *$n$ -рядним* [7], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі  $K_1, \dots, K_n$  (можливо й рівні нулеві) такі, що  $K_1 + \dots + K_n \in M$ , або найбільший власний підмодуль в  $M$ , а  $K_i \cap K_j$  ( $i \neq j$ ) - нуль або простий модуль.

Напівдосконале кільце  $A$  називається  *$n$ -рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий  $A$ -модуль є  $n$ -рядним [7].

Природно, що можна розглядати і  $n$ -рядні тільки справа або зліва кільця. Часто, не уточнюючи  $n$ ,  $n$ -рядне кільце будемо називати багаторядним.

Зрозуміло, що при  $n=1$  ми отримуємо напівланцюгові кільця, а при  $n=2$  – бірядні кільця.

**Теорема 2** [7]. *Якщо кільце  $A$  багаторядне справа (зліва),  $e$  – ненульовий ідемпотент кільця  $A$ , то кільце  $eAe$  багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце  $A$  багаторядне, то й кільце  $eAe$  багаторядне.*

**Теорема 3** [7]. *Локальне багаторядне кільце  $A$  є ланцюговим.*

**Лема 1** [7]. *Фактормодуль  $n$ -рядного модуля -  $n$ -рядний.*

**Лема 2** [7]. *Факторкільце  $n$ -рядного справа (зліва) кільця  $A$   $n$ -рядне справа (зліва). Зокрема, факторкільце  $n$ -рядного кільця  $n$ -рядне.*

Ідеал  $J$  кільця  $A$  називається *первинним*, якщо  $J \neq A$  і для будь-яких ідеалів  $L$  і  $N$  кільця  $A$  з включення  $LN \subset J$  випливає, що або  $L \subset J$ , або  $N \subset J$ .

*Первинним радикалом  $I$  кільця  $A$  називається перетин усіх первинних ідеалів кільця  $A$ .*

Напівдосконале кільце називається *кусковою областю* якщо будь-який ненульовий гомоморфізм його головних модулів є мономорфізмом.

Нехай  $I = f_1 + \dots + f_m$  - розклад одиниці напівдосконалої кускової області  $A$  в суму попарно ортогональних ідемпотентів. Тоді, згідно [6] кускова область  $A$  має наступний двосторонній пірсівський розклад:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ii} (i = 1, \dots, m) - \text{первинні кільця, } A_{ij} (i \neq j) -$$

лівий  $A_{ii}$  -модуль і правий  $A_{jj}$  -модуль, причому якщо  $A_{ij}$  і  $A_{jk}$  одночасно не дорівнюють нулю, то  $A_{ik} \neq 0 (i, j, k = 1, \dots, m)$ .

У цьому випадку первинний радикал  $I$  кільця  $A$  має вигляд:

$$(2) \quad I = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Отже, він нільпотентний.}$$

Розглянемо факторкільце  $\check{A} = A/I = \check{A}_1 \times \dots \times A_m$ , де  $\check{A}_i (i = 1, \dots, m)$  нерозкладні кільця.  $I = f_1 + \dots + f_m$  - відповідний розклад  $I \in \check{A}$  у суму попарно ортогональних ідемпотентів.

Позначимо  $V = I/I^2$  і співставимо ідемпотентам  $f_1, \dots, f_m$  точки  $1, \dots, m$  з'єднуючи точку  $i$  з точкою  $j$  стрілкою тоді і тільки тоді, коли  $f_i V f_j \neq 0$ . Отриманий скінченний орієнтований граф називається *первинним сагайдаком кільця  $A$*  і позначається  $PQ(A)$  [8].

Враховуючи теорему про однозначність розкладу напівдосконалого кільця в прямий добуток нерозкладних кілець, неважко бачити, що сагайдак  $PQ(A)$  визначається однозначно, з точністю до перенумерації вершин. Очевидно також, що сагайдак  $PQ(A)$  не змінюється при переході до кілець еквівалентних у сенсі Моріті і  $PQ(A) = PQ(A/I^2)$ .

**Теорема 4** [10]. *Нехай багаторядна кускова область  $A$  з первинним радикалом  $I$  має двосторонній пірсівський розклад (1). Тоді  $\check{A} = A/I$  розкладається в прямий добуток тіл і первинних напівланцюгових кілець.*

**Лема 3** [10]. *Нехай  $A$  така багаторядна кускова область, що її факторкільце  $\check{A}$  по первинному радикалу  $I$  ізоморфне або тілу  $D$ , або первинному напівланцюговому кільцю  $\Delta$ , тоді  $A \cong D$ , або  $A \cong \Delta$ .*

**Лема 4** [10]. *Якщо кільце ендоморфізмів головного модуля  $P$  над багаторядною кусковою областю  $A$  не є тілом, то  $P$  - ланцюговий модуль. Це ж має місце і для лівих головних  $A$  - модулів.*

Скінченний орієнтований граф (сагайдак у термінології Габріеля) називається *ациклічним графом* (сагайдаком), якщо у ньому немає орієнтованих циклів. Точка сагайдака  $Q$  називається *витоком* (стоком), якщо в неї не входить (з неї не виходить) стрілка.

Будемо говорити, що точка  $j$  первинного сагайдака напівспадкового багаторядного кільця  $A$  має вагу  $D$  чи вагу  $\Delta$ , якщо  $f_j A f_j \cong D$  чи  $f_j A f_j \cong \Delta$ .

**Теорема 5.** *Первинний сагайдак  $PQ(A)$  кускової багаторядної області  $A$  ( $n \geq 2$ ) має наступні властивості:*

- 1) у точку з вагою  $\Delta$  входить не більше однієї стрілки і виходить з такої точки не більше однієї стрілки;
- 2)  $PQ(A)$  ациклічний;
- 3) з кожної точки  $PQ(A)$  виходить не більше ніж  $n$  стрілок;
- 4) у кожену точку  $PQ(A)$  входить не більше ніж  $n$  стрілок;
- 5) якщо в точку входить більше однієї стрілки, то ця точка є стоком;
- 6) якщо з точки виходить більше однієї стрілки, то ця точка є виток.

**Д о в е д е н н я.**

1). Нехай у точку  $g$  з вагою  $\Delta$  входять стрілки з точок  $i$  і  $j$  ( $i < j < g$ ).

Тоді  $A_{ig} \neq 0$ ,  $A_{jg} \neq 0$ , причому  $A_{ig} \notin I^2$ ,  $A_{jg} \notin I^2$ . Якщо  $A_{ij} = 0$ , то кільце  $A$  не буде  $n$ -рядним за теоремою 3. Якщо ж  $A_{ij} \neq 0$ , то  $A_{ig} = A_{ij} A_{jg}$ . Тобто  $A_{ig} \in I^2$ , що знову приводить до протиріччя. Аналогічно з точки з вагою  $\Delta$  не можуть виходити дві стрілки.

2). Властивість безпосередньо випливає з клітинно - трикутного вигляду (1) кільця  $A$ .

3). Нехай із точки 1 виходять стрілки в точки  $2, \dots, n+1, n+2$ . Тоді  $A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n+2}$  ненульові, причому  $A_{23}, \dots, A_{2n+2}, A_{34}, \dots, A_{3n+2}, \dots, A_{n+1n+2}$  дорівнюють нулю (інакше існують  $A_{li}$  ( $i=2, \dots, n+2$ )  $\in I^2$ ). Ясно, що при цьому головний  $A$ -модуль  $P_1 = f_1 A \in n+1$ -рядним, що суперечить  $n$ -рядності кільця  $A$ .

4). Доведення таке ж, як і у випадку 3, тільки для лівих головних  $A$ -модулів.

5). Розглянемо головний модуль  $P_i = e_i A$ , де  $e_i$  – локальний ідемпотент кільця  $A$ .  $P_i R = K_1 + \dots + K_n$ , де  $K_t$  – ланцюговий модуль ( $t=1, \dots, n$ ). Тоді елемент  $a_{ij} \in e_i R e_j \subset K_t$  породжує ланцюговий модуль

$M = a_{ij} A = (0, \dots, 0, A_{ij}, A_{ij} A_{jj+1}, A_{ij} A_{jj+2}, \dots, A_{ij} A_{jn})$ , причому серед добутків  $A_{ij} A_{jk}$  ( $k=j+1, \dots, n$ ) існує не більше одного відмінного від нуля, тому що якщо їх принаймні два, те легко перевірити, що  $MR/MR^2 = u_1 + u_2$ , в протиріччя тому, що  $M$  – ланцюговий модуль. Припустимо, що в точку  $g$  увійшли стрілки з початками в точках  $i$  і  $j$ , а з неї вийшла стрілка в точку  $p$  ( $i < j < g < p$ ). Тоді  $A_{ig}, A_{jg}, A_{gp}$  ненульові,  $A_{ij} = 0$ , тому що в протилежному  $A_{ig} = A_{ij} A_{jg} \in I^2$ , а  $A_{ip} = A_{ig} A_{gp} \neq 0$  і  $A_{jp} = A_{jg} A_{gp} \neq 0$ , що суперечить попередньому. Таким чином, точка  $g$  є стоком.

6). Доводиться аналогічно 5.

Нагадаємо, що *мінором  $n$ -го порядку кільця  $A$*  називається кільце ендоморфізмів  $B$  скінченно – породженого проективного  $A$ -модуля, який розкладається в пряму суму  $n$  – нерозкладних модулів [11].

Перейдемо до опису мінорів другого порядку багаторядних кускових областей. В силу теореми Моріти досить розглянути зведені мінори.

Отже, ми будемо описувати нерозкладні зведені кускові багаторядні області  $B$ , одиниця яких розкладається в суму двох локальних ідемпотентів:  $I = e_1 + e_2$ . Так як двосторонній пірсовський розклад багаторядних кускових областей має вигляд (1), то кільце  $B$  має вигляд:

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де кільця } B_1 \text{ і } B_2 \text{ ізоморфні або тілу } D, \text{ або}$$

первинному напівланцюговому кільцю  $\Delta$ , а  $X$  – ланцюговий правий  $B_2$ -модуль і ланцюговий лівий  $B_1$ -модуль (так як кільце  $B$  напівдистрибутивне).

Згідно теореми 5 первинний сагайдак такого кільця має вигляд:

$$1 \bullet \longrightarrow \bullet 2$$

Кільце називається *напівспадковим*, якщо будь-який його скінченнопороджений ідеал проєктивний.

**Теорема 6.** *Нерозкладний зведений мінор другого порядку  $B$  багаторядної кускової області  $A$  є напівланцюговим напівспадковим кільцем.*

**Д о в е д е н н я.** Нехай  $I = e_1 + e_2$  – розклад  $I \in B$  в суму двох локальних ідемпотентів,  $B_i = e_i B e_i$ ,  $R_i$  – радикал Джекобсона кільця  $B_i$ , ( $i = 1, 2$ ),  $R$  – радикал Джекобсона кільця  $B$ ,  $X = e_1 B e_2$ . Тоді в силу представлення (3) для  $R$  маємо

$$(4) \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо головний модуль  $e_1 A$ . Припустимо, що він бірядний. Тоді за означенням  $e_1 R = K_1 + K_2$  ( $K_i$  – ланцюгові  $i = 1, 2$ ), а  $K_1 \cap K_2$  простий або дорівнює нулю. Тоді  $R_1 = K_1 e_1$  або  $R_1 = K_2 e_1$ . Якщо  $R_1 = 0$ , то  $B_1$  – тіло, і так як  $X$  – ланцюговий модуль, то і  $e_1 A$  – ланцюговий. Отже,  $B$  – напівланцюгове кільце.

Нехай тепер  $R_1 \neq 0$  і  $R_1 = K_1 e_1$ . Тоді, оскільки  $B$  кускова область, то  $R_1 X \neq 0$ . Якщо  $R_1 X = X$ , то  $e_1 R = K_1$ , так як  $(R_1, R_1 X)$  лежить в  $K_1$ , а значить і  $e_1 A$  – ланцюговий правий модуль. Якщо ж  $R_1 X \neq X$ , то  $R_1 X$  – простий правий модуль, отже  $R_1 X R_2 = 0$  і  $R_2 = 0$  так як  $B$  кускова область. Таким чином  $B$  – напівланцюгове кільце.

Нехай  $j$  скінченнопороджений ідеал, який лежить в  $e_i A$  ( $i = 1, 2$ ). Так як  $j$  – ланцюговий модуль, то він є фактор-модулем головного модуля, а так як  $A$  кускова область, маємо, що  $j$  ізоморфний головному модулю. Ясно, що він проєктивний і  $B$  – напівспадкове справа кільце. Якщо ж  $j$  лежить в  $e_1 A \oplus e_2 A$ , то розглянемо ідеал  $j + e_1 A$ . Тоді  $j + e_1 A = j' \oplus e_1 A$ , де  $j'$  проєкція  $j$  на  $e_2 A$ . Так як  $j'$  скінченнопороджений ідеал, який лежить в головному модулі, то він проєктивний. За теоремою про ізоморфізми  $j + e_1 A / j \cong e_1 A / e_1 A \cap j$ , а за лемою Шануеля  $j \oplus e_1 A \cong (j + e_1 A) \oplus e_1 A \cap j$ , де обидва прямі доданки проєктивні. Отже,  $j$  – проєктивний модуль. Аналогічно доводиться, що  $A$  –

напівспадкове справа.

**Теорема 7.** Багаторядна кускова область  $A$ , у двосторонньому пірсовському розкладі (1) якої всі  $A_{ij} \neq 0$  при  $i$  менших  $j$ , є напівланцюговим напівспадковим кільцем.

**Д о в е д е н н я.** Припустимо, що головний  $A$ -модуль  $P$  не ланцюговий. Але тоді приходимо до протиріччя з тим, що  $A$ - кускова область, чи до протиріччя з теоремою 6. Напівспадковість кільця  $A$  доводиться аналогічно як у теоремі 6.

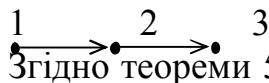
Розглянемо мінори 3-го порядку багаторядних кускових областей.

З вищесказаного випливає, що потрібно описати нерозкладні зведені кускові багаторядні області  $B$ , одиниця яких розкладається в суму трьох локальних ідемпотентів:  $1 = e_1 + e_2 + e_3$ . Такі кільця мають вигляд:

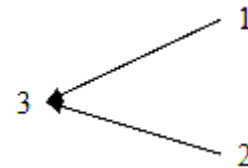
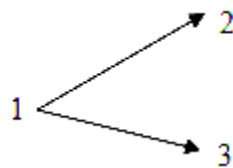
$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_2 & B_{23} \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}, \text{ де кільця } B_1, B_2 \text{ і } B_3 \text{ ізоморфні або тілу } D, \text{ або}$$

первинному напівланцюговому кільцю,  $B_{ij}$  – ланцюгові бімодулі.

Якщо всі бімодулі  $B_{ij}$  відмінні від нуля то, згідно теореми 4, маємо напівланцюгове напівспадкове кільце з первинним сагайдаком :



Згідно теореми 5 для мінорів 3-го порядку отримаємо ще такі первинні



сагайдаки:

яким відповідають мінори:

$$(5) \quad B = \begin{pmatrix} D_1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad (6) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & B_{13} \\ 0 & B_2 & B_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 8.** Мінори 3-го порядку багаторядної кускової області вигляду

$$(5) \text{ і } (6) \text{ ізоморфні кільцям : } \begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \text{ де } D \text{ тіло, а}$$

$B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) або співпадають з тілом  $D$ , або є первинними напівланцюговими кільцями.

**Д о в е д е н н я.** Розглянемо для прикладу кільце (6). Нехай  $x_0$  і  $y_0$  ненульові елементи, які належать відповідно бімодулям  $B_{13}$  і  $B_{23}$ . Задамо відображення  $\varphi: B_1 \rightarrow D_3$ , і відображення  $\psi: B_2 \rightarrow D_3$  за правилами  $a x_0 = x_0 \overrightarrow{a}^\varphi, \overrightarrow{b} y_0 = y_0 \overrightarrow{b}^\psi$ . Ясно, що  $\varphi$  і  $\psi$  -  $\overrightarrow{\text{мономорфізми}}$ .

Поклавши  $D = D_3$ ,  $B_1 = Im \varphi$ ,  $B_2 = Im \psi$ , побудуємо кільце  $A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$

і задамо відображення  $f$  кільця  $A$  в кільце (б), поклавши

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^{\varphi^{-1}} & 0 & x_0x \\ 0 & b^{\psi^{-1}} & y_0y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

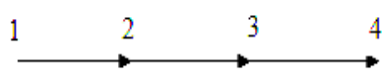
Множення і додавання введемо як звичайні множення і додавання матриць. Неважко перевірити, що таке відображення буде ізоморфізмом.

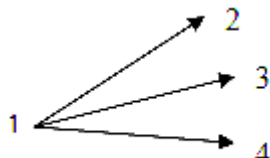
**Наслідок 2.3.1.** Мінор 3-го порядку багаторядної кускової області є або напівланцюговим напівспадковим кільцем, або ізоморфний одному із

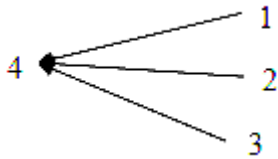
кільць :  $\begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & D \\ 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ , де  $D$  тіло, а кільця  $B_i$  ( $i = 1,2,3$ ) або


співпадають з тілом  $D$ , або є первинними напівланцюговими кільцями.


Опишемо мінори 4-го порядку багаторядних кускових областей. Міркуючи аналогічно до попереднього отримаємо 11 (з точністю до перенумерації вершин) первинних сагайдаків побудованих на 4-х вершинах, а відповідно і 11 кільць які їм відповідають:

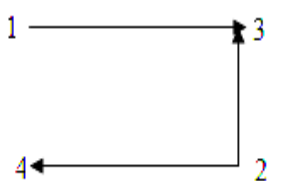
1).   $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_2 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$ ,

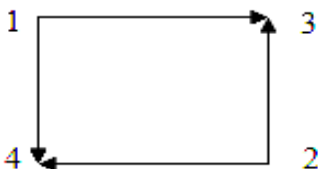
2).   $A = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$ ,

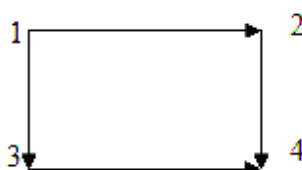
3).   $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ ,

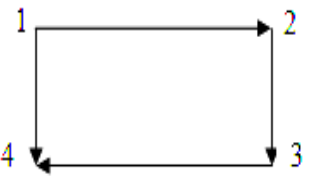
4).   $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & 0 & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ ,

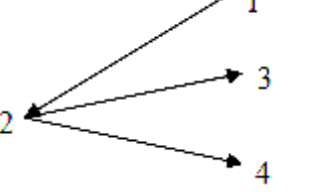
5).  
$$A = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

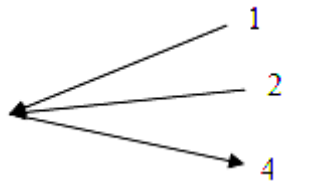
6).  
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & D & 0 \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}.$$

7).  
$$A = \begin{pmatrix} D & 0 & D & D \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

8).  
$$A = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & A_2 & 0 & D \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

9).  
$$A = \begin{pmatrix} D & D & 0 & D \\ 0 & A_2 & D & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

10).  
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & D & D & D \\ 0 & D & D & D \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

11).  
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & D & 0 \\ 0 & A_2 & D & 0 \\ 0 & 0 & D & D \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

де  $D$  тіло, а  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) або співпадають з тілом  $D$ , або є первинними напівланцюговими кільцями.  $A_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – ланцюговий лівий модуль над кільцем  $A_i$  і ланцюговий правий модуль над кільцем  $A_j$ .

### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Nakayama T. On Frobeniusen algebras II // Ann. of Math. – 1941. – V. 42, № 1. – P. 1-22.
2. Скорняков Л.А. Когда все модули полуцепные? // Мат. заметки. – 1969. – Т. 5, № 2. – С. 173-182.



3. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
4. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
5. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.
6. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438-456.
7. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.
8. Кириченко В.В. О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1982. – Т. 144. – С. 137-147.
9. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
10. Яременко Ю.В. Багаторядні кускові області // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2002. - №4. – С. 50-55.
11. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.