7. Brown T. Duke R.A.An irreducible graph consisting a single block.J. Math. and Mech.1966 15 №1 129 – 135.

8. Duke R.Haggard G.The genus subgraphs K_8.Israel J.Math.11(1972) 452–455.

9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations betwen combinatorics and other parts mathematics.Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.

10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen.Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.

11. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlosenen Flachen.Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.

12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.

13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.

14. Петренюк В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2,2008,с.34-40

15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006.

16. Milgram M. Irreducible graphs.J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.

17. Milgram M.Irreducible graphs.J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.

18. Youngs J.W.Irreducible graphs.Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.

19. Gagarin A.,William K. Embedding graphs containing K_5-subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50, 2002.

20. Gagarin A., Myrvold W.,Chambers J.The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s.Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

21. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006.

22. Петренюк В. І. Об оценке рода специальних графов. деп. рукопис в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986.

23. Mohar Bojan. Face covers and the genus problem for apex graphs. J.Combin.Theory,B 2001.v.82 p.102-117.

24. Петренюк В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа.Искусст. интеллект.2004. т.,4.с. 34-45.

25. Петренюк В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусст. интеллект-2004", Кацивели,Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.

УДК 519.53+517.987

КРИТЕРИИ ПОДПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРНЫХ МЕР И СХОДИМОСТЬ ПОРОЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А.РОМАНОВ

Доведені теореми збіжності для лінійних операторів, які породжуються векторними мірами. Також отримані операторні критерії підпросторової неперервності векторних мір відносно різних типів збіжності.

The convergence theorems for the linear operators that generated by vector measures are proved. Also the operator criteria for subspace continuity of vector measures with respect to different types of convergence are established.

1. Введение. Известно, что вопросы сходимости мер и линейных операторов в бесконечномерных пространствах представляют интерес как для самого бесконечномерного анализа (см., например, работы [1], [2] для мер и [3], [4] для операторов), так и для применений в теории вероятностей в целом [5] и в теории случайных процессов в частности [6].

Предельные переходы с мерами основных классов гладкости (непрерывными, дифференцируемыми, квазиинвариантными и аналитическими), заданными в топологических векторных пространствах, были исследованы как для мер с числовыми значениями (см., например, работы [7], [8], [9], [10]), так и для мер с векторными значениями ([11], [12], [13]). Также отметим работу [14], в которой доказано, что непрерывная компонента меры (как скалярной, так и векторной) относительно индуктивного подпространства совпадает с пределом последовательности ее непрерывных компонент относительно тех подпространств, которые образуют упомянутое индуктивное подпространство. Что же касается порождаемых непрерывными мерами линейных операторов, то для них вопрос сходимости оставался неисследованным. Кроме того, в связи с происходящим развитием теории векторных мер представляет интерес получение операторных критериев их непрерывности.

2. Постановка задачи. Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, то есть полное сепарабельное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство, У - банахово пространство.

Всюду в дальнейшем под измеримостью множеств и функций понимаем их измеримость относительно борелевских сигма-алгебр.

Пусть F(X) - пространство ограниченных действительнозначных измеримых функций на X, а F(X,Y) - пространство ограниченных измеримых функций на X, принимающих значения в У. Каждое из этих двух функциональных пространств наделяем соответствующей чебышевской нормой.

Под векторными мерами в X понимаем счетно-аддитивные функции множества конечной полной вариации, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающие значения в пространстве У.

Определение 1. *Оператором свертки, порождаемым векторной мерой m,* называется оператор Q_m ,действующий из пространства F(X) в пространство F(X,Y) , значение которого на каждой скалярной ограниченной измеримой функции f представляет собой векторную функцию, задаваемую в произвольной точке x из X формулой

$$(Q_m f)(x)=\int f(x-z)dm(z), \qquad (1)$$

где интегрирование производится по всему пространству X.

Замечание 1. Интеграл от скалярной функции по векторной мере m,фигурирующий в правой части формулы (1), понимается как такой элемент y пространства У, что для произвольного линейного непрерывного функционала y* из сопряженного к У пространства его значение на y равно интегралу от той же скалярной функции по скалярной мере y*m, представляющей собой композицию векторной меры m и функционала y*. Из линейности операции интегрирования по скалярным мерам вытекает линейность интеграла и по векторной мере. Поэтому порождаемый мерой m оператор Q_m тоже линеен.

Определение 2. *Сдвигом векторной меры m на вектор h* пространства X называется векторная мера m_h ,значение которой на каждом измеримом множестве B задается формулой

$$m_h (B)=m(B+h).$$

Определение 3. Векторная мера называется *поточечно непрерывной* (или, более длинно, непрерывной относительно сходимости на системе всех измеримых множеств) *по направлению h,* если при сдвиге меры на вектор th и стремлении коэффициента t к нулю ее приращение имеет нулевой предел в смысле сходимости на системе измеримых множеств. Если же указанное приращение имеет нулевой предел в смысле полувариационной сходимости, то мера называется *полувариационно непрерывной.* Если H -линейное подпространство пространства X, то векторная мера называется *поточечно непрерывной относительно H*, если она поточечно непрерывна по каждому направлению из H. Аналогично определяется полувариационная подпространственная непрерывность.

Цель статьи состоит в доказательстве теорем сходимости для линейных операторов, порождаемых векторными мерами, а также в получении операторных критериев непрерывности векторных мер.

3.Результаты работы.

Лемма 1. *Для каждой функции f из пространства F(X) норма ее интеграла по векторной мере m не превосходит произведения нормы функции f на полувариацию меры m .*

Доказательство. Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что норма указанного интеграла может быть записана как верхняя грань по всем функционалам y* из единичного шара сопряженного к У пространства множества значений функционалов y* на упомянутом интеграле, что равно верхней грани интегралов функции f по скалярным мерам y*m, а потому не превосходит произведения нормы функции f на верхнюю грань вариаций скалярных мер y*m . Далее остается воспользоваться тем обстоятельством, что для скалярных мер y*m их вариации совпадают с полувариациями, а потому не превосходят полувариации векторной меры m .

Теорема 1. *Для нормы линейного оператора, порожденного векторной мерой m, справедлива формула*

$$\|Q_m\|=\|m\|, \qquad (2)$$

где в правой части фигурирует полувариация данной векторной меры.

Доказательство. Вначале заметим, что если f - индикатор измеримого множества (- B), то из формулы (1) вытекает, что при x=0 величина $(Q_m f)(0)$ совпадает с интегралом от f(-z) и потому равна m(B) .

Пусть теперь { B_1 , B_2 , …, B_n } - произвольная система из конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств и {a_1 , a_2 ,…, a_n} - система из такого же числа скаляров , по модулю не превосходящих 1. Тогда функция f, равная линейной комбинации индикаторов множеств ($-B_к$) с коэффициентами $a_к$, принадлежит единичному шару пространства F(X), причем

$$\|(Q_m f)(0)\| = \|\sum a_k\ m(B_k)\| .$$

Переходя к верхней грани по всем системам множеств и по всем системам скаляров указанного вида, приходим к неравенству

$$\|Q_m\| \geq \|m\|. \tag{3}$$

С другой стороны, из формулы (1) с учетом леммы 1 вытекает, что для любой функции f из пространства F(X) справедливо неравенство

$$\|Q_m f\| \leq \|f\|\ \|m\| .$$

Следовательно,

$$\|Q_m\| \leq \|m\| .$$

Отсюда и из неравенства (3) вытекает формула (2). Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Поскольку полувариация векторной меры конечна, то порождаемый линейный оператор имеет конечную норму, а потому непрерывен.

Теорема 2. *Пусть m_n - последовательность векторных мер в сепарабельном пространстве Фреше X. Тогда для того чтобы последовательность порождаемых ими линейных операторов Q_n сходилась относительно операторной нормы к линейному оператору Q,порождаемому еще одной векторной мерой m, необходимо и достаточно, чтобы последовательность m_n сходилась относительно полувариации к мере m .*

Доказательство. Применяя теорему 1 к разности векторных мер m_n и m,

приходим к равенству

$$\|Q_n - Q\| = \|m_n - m\| ,$$

из которого и вытекает утверждение теоремы 2.

Векторную меру D называем *вполне разрывной относительно подпространства H*, если не существует нетривиальной поточечно непрерывной относительно H векторной меры, вариация которой мажорируется вариацией векторной меры D .

Напомним, что для каждого линейного подпространства H пространства X любую меру в X можно единственным способом разложить в сумму непрерывной относительно H и вполне разрывной относительно H мер, называемых соответственно непрерывной и вполне разрывной относительно H компонентами данной меры. Для скалярной меры этот результат содержится в работах [15}, [16], а для векторной - в работе [17] . В связи с указанным H-разложением меры возникают линейные операторы, порождаемые непрерывной и вполне разрывной компонентой. Поэтому при задании целой последовательности подпространств $H_к$ (вместо только одного какого-нибудь подпространства) появляются две последовательности операторов, порождаемых непрерывными и вполне разрывными относительно $H_к$ компонентами. Такая ситуация бывает тогда, когда некоторое подпространство имеет индуктивную структуру, то есть представимо как объединение возрастающей по включению последовательности подпространств. Подпространства индуктивной структуры находят применения в теории обобщенных функций [18]. Поэтому представляет интерес исследование сходимости соответствующих последовательностей порождаемых операторов.

Теорема 3. *Пусть m - векторная мера в сепарабельном пространстве Фреше X, H - индуктивное подпространство в X, совпадающее с объединением возрастающей последовательности линейных подпространств $H_к$.Тогда последовательности линейных операторов U_k и V_k , порождаемых непрерывными и вполне разрывными компонентами меры m относительно $H_к$, имеют своими пределами в смысле сходимости по операторной норме операторы U и V , порождаемые соответственно непрерывной и вполне разрывной компонентами m относительно H .*

Доказательство. Обозначим через $C_к$ и D_k непрерывные и вполне разрывные компоненты векторной меры m относительно подпространств $H_к$, а через C и D - аналогичные компоненты относительно H.

Применяя теорему 1 к разности мер $C_к$ и C, приходим к равенству

$$\|U_k - U\| = \|C_k - C\| ,$$

где в правой части фигурирует полувариация векторной меры $C_к$ - C . Поскольку для каждой векторной меры ее полувариация не превосходит вариации, то отсюда следует, что

$$\|U_k - U\| \leq Var(C_k - C). \tag{4}$$

Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$\|V_k - V\| \leq Var(D_K - D). \tag{5}$$

Из теоремы 2 работы [14] следует, что правая часть неравенства (4) имеет нулевой предел. Согласно замечанию 1 той же работы [14] , правая часть неравенства (5) тоже имеет нулевой предел. Но тогда и левые части этих неравенств имеют нулевые пределы, откуда и вытекает утверждение теоремы 3.

Замечание 3. В отличие от индуктивного, для проективного подпространства H, представимого как пересечение убывающей последовательности подпространств $H_к$, уже нельзя утверждать, что порождаемые непрерывными и вполне разрывными относительно $H_к$

компонентами меры последовательности операторов U_k и V_k имеют своими пределами операторы U и V, которые порождаются непрерывной и вполне разрывной компонентами той же меры относительно H. Действительно, пусть X - бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, H - его конечномерное подпространство, X_0 - ортогональное дополнение H. Зафиксируем в X_0 некоторый ортонормированный базис. Пусть $X_к$ - ортогональное дополнение в X_0 первых к элементов базиса и $H_к=H+X_к$ - алгебраическая сумма в X подпространств H и $X_к$. Тогда последовательность подпространств $H_к$ убывает и имеет H своим пересечением. Пусть m - непрерывная по всем направлениям из H гауссовская мера в X. Поскольку подпространства $H_к$ имеют конечные коразмерности, то непрерывные компоненты $C_к$ меры m относительно $H_к$ равны нулю, а потому и $U_k=0$. В то же время непрерывная компонента C меры m относительно H совпадает с самой мерой m, а потому $\|C_k - C\| = m(X) = 1$. Но тогда и $\|U_k - U\|=1$. Следовательно, последовательность операторов U_k не сходится к оператору U. Аналогичным образом получаем, что и $\|V_k - V\| =1$, а потому последовательность операторов V_k не сходится к оператору V.

Теперь докажем операторный критерий поточечной, а затем и операторный критерий полувариационной непрерывности.

Теорема 4. *Пусть m - векторная мера в сепарабельном пространстве Фреше X, H - линейное подпространство в X. Тогда для поточечной непрерывности m относительно H необходимо и достаточно, чтобы порождаемый этой мерой оператор Q переводил пространство F(X) в множество векторных функций, непрерывных по каждому направлению из H.*

Доказательство. Сначала докажем **необходимость.** Пусть m поточечно непрерывна относительно H, h принадлежит H и функция g из F(X) принимает конечное число значений $a_к$ на множествах $B_к$. Из формулы (1) следует, что тогда для любого x из X векторная величина

$$(Qg)(x+th) – (Qg)(x)$$

совпадает с суммой конечного числа слагаемых вида

$$a_k (m_{th} – m)(- B_k +x) ,$$

каждое из которых при стремлении числа t к нулю имеет нулевой предел. Тогда и вся сумма (а потому и ее норма) тоже имеет нулевой предел.

Пусть теперь f - произвольная функция из F(X). Для любого положительного числа e найдется такая функция g из F(X), которая принимает конечное число значений и для которой

$$\|f-g\| < e .$$

Но тогда величина $\|(Qf)(x+th) - (Qf)(x)\| = \|\int f(x-z)d(m_{th} - m)(z)\|$,

будет меньше суммы

$$e\,\|m_{th}-m\|+\|\int g(x-z)\,d\,(m_{th}-m)(z)\|\ .$$

Первое слагаемое в полученной сумме не превосходит произведения числа e на константу $2\|m\|$, а второе слагаемое при стремлении числа t к нулю имеет нулевой предел согласно уже рассмотренному случаю функции с конечным числом значений. Следовательно, полученную величину можно сделать сколь угодно малой, чем и доказывается необходимость.

Достаточность же следует из того факта, что для функции f , совпадающей с индикатором измеримого множества (- B), выполняется равенство

$$(m_{th}-m)(B)=(Qf)(th)-(Qf)(0).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть m - векторная мера в сепарабельном пространстве Фреше X, H - линейное подпространство в X. Тогда для полувариационной непрерывности m относительно H необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента h из H порождаемый этой мерой оператор Q переводил любое ограниченное подмножество Ф пространства F(X) в множество векторных функций, равностепенно непрерывное по направлению h .*

Доказательство. Сначала докажем **необходимость.** Пусть мера полувариационно непрерывна относительно H, h принадлежит H, Ф - ограниченное множество в F(X). Тогда нормы всех функций f из Ф не превосходят некоторой общей константы K, а потому с учетом формулы (1) для каждого x из X величина

$$\|(Qf)(x+th)-(Qf)(x)\|,$$

равная

$$\|\int f(x-z)\,d(m_{th}-m)(z)\|\ ,$$

не превзойдет величины

$$K\,\|m_{th}-m\|,$$

имеющей при стремлении числа t к нулю нулевой предел, чем и доказывается необходимость.

Для доказательства **достаточности** рассмотрим в качестве Ф множество индикаторов всех измеримых подмножеств пространства X . Для произвольного h из H и для любого положительного числа e найдется такое положительное число d , что для каждого индикатора f и произвольного x из X из условия $|t|<d$ вытекает неравенство

$$\|(Qf)(x+th)-(Qf)(x)\|<e\ .$$

Пусть A и B - два произвольных непересекающихся измеримых подмножества пространства X , f и g - индикаторы множеств (-A) и (-B). Тогда с учетом формулы (1) величина

$$\|(m_{th}-m)(A)-(m_{th}-m)(B)\|$$

не превзойдет суммы

$$\|(Qf)(th)-(Qf)(0)\|+\|(Qg)(th)-(Qg)(0)\|,$$

а потому при $|t|<d$ будет меньше числа 2e .

Переходя к верхней грани по всем системам из двух непересекающихся измеримых множеств A, B и учитывая предложение 1 работы [19] ,получаем, что для всех t, удовлетворяющих указанному условию, справедливо неравенство

$$\|m_{th} - m\| \leq 2e ,$$

откуда и вытекает достаточность. Теорема 5 доказана.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. Дифференцируемые меры.// Труды Московского Математического О-ва. – 1971. - 24. – С.133-174.
2. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. - М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, Общая теория. – М.: Иностранная Лит., 1962 – 895 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
6. Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – 1, № 2, - С. 177-238.
7. Романов В.А. Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве // Украинский Математический журнал. – 1979. – 31, № 2. – С. 211-214.
8. Романов В.А. Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве // Там же. – 1981. – 33, № 2. – С. 215-219.
9. Романов В.А. Пределы Н-непрерывных мер в гильбертовом пространстве // Успехи математических наук. – 1982. – 37, № 5. – С. 199-200.
10. Романов В.А. Предельные переходы с мерами в гильбертовом пространстве относительно различных видов сходимости // Украинский математический журнал. – 1984. - 36, № 1. – С. 69-73.
11. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Украинский математический журнал. – 1992. – 44, № 8. – С.1133-1135.
12. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы //Там же. – 1995. – 47, № 4. – С. 512-516.
13. Романов В.А. Пределы векторных мер в пространствах Фреше // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету. Серія математичних наук. – 2006. – 65. –С. 95-98.
14. Романов В.А. Непрерывные компоненты меры относительно индуктивных подпространств // Там же. – 2010. – 69. – С. 101-107.
15. Романов В.А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах // Доклады АН СССР. – 1976. – 227, № 3. – С. 569-570.
16. Романов В.А. О разложении меры в линейном пространстве в сумму Н-непрерывной и вполне Н-разрывной мер // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 1976. – 31, № 4. – С. 63-66.
17. Романов В.А. Разложения векторных мер // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету. Серія математичних наук. – 2009. – 68. – С. 95-101.
18. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 472 с.

19. Романов В.А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Математические заметки Российской Академии наук. – 1995. – 57, № 2. – С. 310-312.

УДК 512.552.1

МІНОРИ БАГАТОРЯДНИХ КУСКОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Ю. В. ЯРЕМЕНКО, Т. М. ЖЕРДІЙ

Описано мінори третього та четвертого порядку багаторядних кускових областей.

The minors of orders 3 and 4 of multiserial piecewise domains are described.

Одним з основних понять теорії кілець та модулів є поняття простого модуля, тобто модуля, у якого ришітка усіх підмодулів є двоелементним ланцюгом. Класично напівпрості кільця характеризуються тим, що усі модулі над ними напівпрості, тобто розкладаються в прямі суми простих модулів. Кільця, над якими всі нерозкладні модулі прості, охарактеризовані класичною теоремою Веддербарна-Артина.

Більш широкий клас модулів – клас ланцюгових модулів розглядали Кете, Асано, Накаяма, Скорняков і ін. Відповідним розширенням класу напівпростих модулів є напівланцюгові модулі, тобто прямі суми ланцюгових модулів.

Узагальнено однорядні артинові кільця, тобто напівланцюгові артинові кільця вперше ввів Накаяма [1]. У цій роботі він довів, що над такими кільцями всі модулі напівланцюгові. Скорняков довів, що й навпаки, якщо будь-який модуль над деяким кільцем є напівланцюговим, то це – артинове напівланцюгове кільце [2].

Поняття артинового бірядного кільця введено Фуллером в роботах [3] у зв'язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. Клас артинових бірядний кілець містить узагальнено однорядні кільця Накаями [1], розщепимі групові алгебри скінченного модульного типу та кільця дистрибутивно модульного типу.

У роботі [4] введені бірядні напівдосконалі кільця без будь-яких обмежень скінченності. Структура спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей вказана в роботах [5,6]. Серед кускових бірядних областей виділені кільця модульно обмеженого типу. Показано, що кускові бірядні області модульно обмеженого типу – це в точності напівдосконалі кускові області дистрибутивно модульного типу.

Важливим узагальненням напівланцюгових та бірядних кілець є багаторядні кільця [7].

При вивченні напівланцюгових, бірядних та багаторядних кілець широко використовується метод сагайдаків.