10.Nayfeh A.H. Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // J.Fluid Mech.- 1973.- 59.- P. 803-816.

11.Selezov I., Avramenko O., Nayfeh A., Huq P., Zeegers N. Propagation of water wave-packets at the interface of layer and half-space fluid // Proc. 2nd Int. Conference "Asymptotics in Mechanics". St-Petersburg State Marine Technical University, St-Petersburg, Russia, 13-16 October 1996. Ed. by A.Nayfeh and K.Rozhdestvensky. St-Petersburg. - 1997. – P. 245-252.

12.Watson K.M. The coupling of surface and internal gravity waves^ revised // J/ of Phis. Oceanography.- 1990, Vol. 20.- Pp.1233-1248

УДК 519.15

ПРО ГРАФ-ОБСТРУКЦІЮ ОБМЕЖЕНОГО ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ

В. І. ПЕТРЕНЮК

Досліджується задача про побуду із скінчених простих графів G_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$, де $i=1{,}2$, новий граф-обструкцію G, без вершин степеня 2, обмеженого орієнтованого роду $\gamma(G)$, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, тобто задовольняє рівності $\gamma(G\backslash u)=\gamma(G)-1$.

Задача: Побудувати із скінчених простих графів G_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$, де $i=1{,}2$, новий граф-обструкцію G, без вершин степеня 2, обмеженого орієнтованого роду $\gamma(G)$, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, тобто задовольняє рівності $\gamma(G\backslash u)=\gamma(G)-1$. Основний результат: теорема 1 із умовами існування графів-обструкцій обмеженого орієнтованого роду.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлеревого роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G)=\gamma(S)+1$. Якщо це орієнтована поверхня, то позначатимемо її через σ, а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її через Σ.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S або $\gamma(G)$-неприведеним (irreducible), якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H)\le\gamma(S)<\gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$– неприведених графів позначимо через ζ(S). *Визначення 2.* Граф G мінімальний (мінор) над S, якщо для будь-якого графа G', отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G)\le\gamma(S)<\gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S. Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не меньше $\gamma(S)+1$. Якщо S – евклідова площина, $S=\sigma_0$, то $\Gamma_S=\{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно. Нехай $S=\sigma$ - орієнтована замкнута поверхня роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma)>0, \gamma(\sigma)=n-1$. Задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ зводиться, як показано в [5] до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ. Доведено в [9], що графи B_1, B_2, B_3, $K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1, а G_n n–мінімальний блок, що неприводиться при $n>1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2–неприведених підграфи графа K_8, а саме: $B_1=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1\right)$, $B_2=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus \left(K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1\right)\right)$, $B_3=\left(K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1\right)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф ізоморфний B_3, тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2. В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3}$ $(p+1)$–мінімальний блок, де $p>0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для поверхні Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні ейлерєвої характерис-тики –1. Наведений в [15] повний список з 63-х 2-неприведених над тором графів із 9-ма вершинами (з них 48 мінорів) побачити немає можливості так само, як і результати з [16], [17]. В [19], [20] виписані 2-неприведені графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в огляді [21].

Задача. Побудувати **і**з скінчених простих графів G_i роду $\gamma(G_i)$, де $i=1,2$, новий граф G, без вершин степеня 2, $G=(G^0, G^1)$, обмеженого роду $\gamma(G)$ певною верхньою величиною, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, для довільного ребра $u \in G^1$ виконується рівність $\gamma(G \setminus u)=\gamma(G)-1$, тобто графів-обструкцій обмеженого ейлеревого роду. Для орієнтованого роду графа ця задача буде задачею 1, а для неорієнтованого роду графа задачею 2.

§1. Основний результат по задачі 1

1. Найпростіший варіант задачі 1 матимемо, коли один з графів G_i, саме G_1, є виродженим в одну чи більше точок, а другий буде не виродженим графом G_2, вершини якого з'єднуються принаймні двома ребрами із кожною вершиною виродженого графа, створюючи граф G. Коли $G_1=v$, то граф G (так званий apex-граф) можливо подати як φ-образ графа $G_2+St_m(v)$ при φ-перетворенні наступного виду: $\varphi(G_2+St_m(v), \sum_{i=1}^{m}(a_i \dot{+} g_i)) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^{m})$, де ототожнюються попарно вершини з множини X, $X=\{a_i\}_{i=1}^{m}$, із висячими вершинами g_i зірки $St_m(v)$. Верхня оцінка роду apex-графа знайдена в [22] на

основі числа досяжності $t_{G_2}(X)$ та нових характеристик $\theta_{G_2}(X)$, $\partial\theta_{G_2}(X)$ множини точок X графа G_2 із [24], а в [23] отримано нижню границю роду арех-графа шляхом використання теореми про чотири фарби. У випадку коли граф G_1 складається з двох ізольованих вершин v, w покладемо, що $G_2 := G$, $v:=w$, позначимо через X множину точок графа G_2, визначимо згадані вище її характеристики та виконаємо згадане вище φ-перетворення для не виродженого графа G_2 і $St_m(v)$ (зводимо до випадку виродженого в точку w графа G_1). Надалі вважатимемо, що граф G_1 не містить ізольованих вершин, а під точкою розумітимемо, або вершину, або внутрішню точку ребра.

2. Нехай граф G_1 є зв'язним і кожна його вершина v є центральною вершиною додаткової зірки із принаймні одним висячим ребром-променем, який виходить із v. Тоді називатимемо граф G_1 центром квазізірки $St_m(G_1)$ із m висячими вершинами g_i, або квазізіркою $St_m(G_1)$. Розглянемо φ-перетворення графа $G_2 + St_m(G_1)$ на граф G визначене наступним чином: $\varphi(G_2 + St_m(G_1), \sum_{i=1}^{m}(a_i \underset{\bullet}{+} g_i)) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, тобто шляхом ототожнення кожної пари точок (a_i, g_i) в вершину a_i^*, де множина точок X графа G_2, $X = \{a_i\}_{i=1}^m$, має задане число досяжності $t_{G_2}(X)$ та задані характе-ристики $\theta_{G_2}(X)$, $\partial\theta_{G_2}(X)$. Для повноти викладення нагадаємо про число досяжності множини точок X графа G як найменше число 2-клітин s_i з множини $\sigma_{\gamma(G)} \setminus f(G)$ на границях ∂s_i яких лежить $f(X)$, а f пробігає множину всіх неізоморфних мінімальних вкладень графа G в $\sigma_{\gamma(G)}$. Характеристики $\theta_{G_2}(X)$, $\partial\theta_{G_2}(X)$ визначені в [24], [25] і тільки одна ненульова..

Теорема 1. Нехай мають місце наступні співвідношення А,Б,В:

А. Кожне ребро $u, u \in G_i^1$, зв'язного графа G_i, i=1,2, задовольняє тільки одній із наступних умов: 1). Є суттєвим відносно роду $\gamma(G_i)$ при операції видалення ребра u;

2). Суттєве відносно числа $t_{G_i}(M_i)$ при операції видалення ребра $t_{G_i \setminus u}(M_i) = t_{G_i}(M_i) - 1$ та несуттєве відносно чисел $\theta_{G_i}(M_i)$, $\partial\theta_{G_i}(M_i)$, де $M_2 = \{a_i\}_{i=1}^{m_2}$, $M_1 = \{g_i'\}_{i=1}^{m_1}$- множина всіх вершин g_i' графа G_1 інцидентних висячим ребрам (g_i', g_i) квазізірки $St_m(G_1)$,i=1,2.

Б. Виконуються рівність $t_{G_k}(M_k \setminus \{x\}) = t_{G_k}(M_k) - 1$ принаймні для одного $k, k \in \{1,2\}$, та для кожного елемента $x, x \in M_i$, де $M_1 = \{a_i\}_{i=1}^{m_1}$, $M_2 = \{g_i'\}_{i=1}^{m_2}$, i=1,2;

В. 1) Задане φ-перетворення графа $St_m(G_1)+G_2$ на граф G визначене наступним чином: $\varphi(St_{m_1}(G_1)+G_2, \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{n_i}(g_{ij} \dot{+} a_i)) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^{m_2})$, та виконане шляхом ототожнення кожної підмножини впорядкованих пар вершин $\{(g_{ij}, a_i)\}_{j=1}^{n_i}$, де $\sum_{i=1}^{m_2} n_i = m_1$, в вершину a_i^* графа G, де множини вершин M_k графа G_k, $M_1 = \{\{g_{ij}^{'}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^{m_2}$, $M_2 = \{a_i\}_{i=1}^{m_2}$ мають задане число досяжності $t_{G_k}(M_k)$ та задані характеристики $\theta_{G_k}(M_k)$, $\partial\theta_{G_k}(M_k)$, $k=1,2$, а вершина g_{ij} є висячою вершиною квазізірки $St_{m_1}(G_1)$ суміжною вершині $g_{ij}^{'}$ графа G_1 та належить до множини $M_1^{'} = \{\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^{m_2}$. Тоді виконуватимуться наступні твердження: 1) кожне ребро u графа G суттєве відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра, 2) Має місце наступна нерівність: $\gamma(G) \le \sum_{k=1}^{2} \gamma(G_k) + t_{G_k}(M_k) - 1 - \theta_{G_k}(M_k) - \partial\theta_{G_k}(M_k)$.

Доведення. Розглянемо мінімальне вкладення f_k графа G_k в замкнутий орієнтований 2-многовид σ_k роду $\gamma(G_k)$, при якому множина точок M_k графа G_k розміщується на границях t_k 2-кліток із підмножини $S_{G_k}(M_k)$ множини $\sigma_k \setminus f_k(G_k)$, $S_{G_k}(M_k)=\{s_i\}_{i=1}^{t_k}$, та має певні характеристики $\theta_{G_k}(M_k)$, $\partial\theta_{G_k}(M_k)$, $t_k = t_{G_k}(M_k)$, де $t_k \ge 2$, k=1,2.

Виконаємо стандартні операції приєднання до 2-клітин s_i, $S_{G_k}(M_k)=\{s_i\}_{i=1}^{t_k}$, 2-ручок у кількості N_k, $N_k = t_{G_k}(M_k) - 1 - \theta_{G_k}(M_k) - \partial\theta_{G_k}(M_k)$. Згідно [24] отримаємо нове вкладення $f_k^{'}$ графа G_k в замкнутий орієнтований 2-многовид $\sigma_k^{'}$ роду $\gamma(G_k)+N$, при якому множина точок M_k графа G_k розміщується на границі деякої клітини $s_k{'}$, $s_k^{'} \in \sigma_k^{'} \setminus f_k^{'}(G_k)$, k=1,2. Візьмемо пару дисків d_1, d_2 із середини клітин $s_1^{'}, s_2^{'}$, відповідно, та ототожнимо границі цих дисків і отримаємо 2-ручку h, приєднану до цих клітин різних 2-многовидів, яка має границею $\partial s_1^{'} \cup \partial s_2^{'}$ та об'єднує обидва 2-многовиди $\sigma_k^{'}$ роду $\gamma(G_k)+N_k$ в новий 2-многовид $\sigma^{'}$ роду $\sum_{k=1}^{2}\gamma(G_k)+N_k$. Також матимемо вкладення f, $f=f_1+f_2$, $f: G_1+G_2 \to \sigma{'}$, яке розміщує множину $f(M_1+M_2)$ на ∂h. Виконаємо φ-перетворення із співвідношення В шляхом ототожнення кожної висячої вершини g_{ij} з множини $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ та вершини a_i з множини $M_2 = \{a_i\}_{i=1}^{m_2}$ в точку a_i^*, $i=1,2,...m_2$. Тоді образом довільного висячого ребра

$(g_{ij}, g_{ij}^{'})$ квазізірки $St_m(G_1)$ буде ребро $(a_i^*, g_{ij}^{'})$ і кожне таке ребро розрізатиме 2-ручку h. Множина кінцевих вершин всіх ребер $(a_i^*, g_{ij}^{'})$ не породжуватиме частинних підграфів графа G гомеоморфних K_4, $K_{2,3}$ і тим самим не буде трьох пар вершин які розділятимуть одна одну на площині кільця $\partial s_1^{'} \cup \partial s_2^{'}$.

В результаті такого φ-перетворення отримаємо граф G роду $\gamma(G)$, що задовольняє нерівності $\sum_{k=1}^{2} \gamma(G_k) + (t_{G_k}(M_k) - 1) - \theta_{G_k}(M_k) - \partial\theta_{G_k}(M_k)$. Покажемо, що кожне ребро u графа G є суттєвим відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра. Наступні два варіанти вичерпують всі можливості:

Варіант 1. Ребро u графа G є φ-образом ребра u', що належить графу G_k, k=1,2. В силу співвідношення А при операції видалення ребра u', або зменшиться на 1 рід $\gamma(G_k)$, або зменшиться на 1 число досяжності $t_{G_k}(M_k)$ множини вершин M_k графа G_k, та без змін залишаться характеристики $\theta_{G_k}(M_k)$, $\partial\theta_{G_k}(M_k)$, k=1,2.

Варіант 2. Ребро u графа G є φ-образом ребра u', що не належить жодному графу G_k, k=1,2, тобто є висячим ребром графа $St_m(G_1)$. В силу співвідношення Б видалення ребра u' означатиме видалення однієї чи обох його кінцевих вершин із множини вершин M_k графа G_k, яке призведе до зменшення на 1 числа досяжності $t_{G_k}(M_k)$, k=1,2.

В кожному з цих варіантів матимемо зменшення на 1 верхньої оцінки для $\gamma(G)$, що означатиме виконання рівності $\gamma(G \setminus u') = \gamma(G) - 1$. Доведення закінчене.

Наслідок 1. Нехай граф G_1 вироджується в точку g_0 та кожне ребро $u, u \in G_2$, зв'язного графа G_2, або є суттєвим відносно роду $\gamma(G_2)$ при операції видалення ребра u, або є суттєвим відносно числа $t_{G_2}(M_2)$ при операції видалення ребра та несуттєвим відносно чисел $\theta_{G_2}(M_2)$, $\partial\theta_{G_2}(M_2)$, де $M_2 = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M_1 = \{g_i^{'}\}_{i=1}^m$, M_1 множина всіх вершин інцидентних висячим ребрам $(g_i^{'}, g_0)$ квазізірки $St_m(g_0)$ та для кожного елемента x, $x \in M_2$, має місце рівність $t_{G_2}(M_2 \setminus \{x\}) = t_{G_2}(M_2) - 1$. Якщо задане φ-перетворення графа $St_m(g_0) + G_2$ на граф G наступним чином: $\varphi(St_m(g_0) + G_2, \sum_{i=1}^{m}(g_i \dot{+} a_i)) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, та виконане шляхом ототожнення кожної підмножини впорядкованих пар вершин, в вершину a_i^* графа G, де множини вершин $M_1 = \{g_i^{'}\}_{i=1}^m$, $M_2 = \{a_i\}_{i=1}^m$ число досяжності $t_{G_2}(M_2) \geq 2$ та задані характеристики $\theta_{G_2}(M_2)$, $\partial\theta_{G_2}(M_2)$, а вершина g_i є висячою вершиною квазізірки $St_m(g_0)$. Тоді кожне ребро u графа G суттєве відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра та $\gamma(G)\le\gamma(G_2)+t_{G_2}(M_2)-\theta_{G_2}(M_2)-\partial\theta_{G_2}(M_2)-1$.

Наслідок 2. Якщо граф G побудовано згідно теоремі 1 та виконується рівність $\gamma(G)=\sum_{k=1}^{2}\gamma(G_k)+t_{G_k}(M_k)-1-\theta_{G_k}(M_k)-\partial\theta_{G_k}(M_k)$, то кожне ребро u графа G суттєве відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра, тобто отримаємо граф-обструкцію роду $\gamma(G)$.

*Наслідок 3.*Якщо граф G задовольняє наслідкові1і наступній умові $\gamma(G)=\gamma(G_2)+t_{G_2}(M_2)-\theta_{G_2}(M_2)-\partial\theta_{G_2}(M_2)-1$, то кожне ребро u графа G суттєве відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра, тобто отримаємо граф-обструкцію роду $\gamma(G)$.

Наведемо наступні приклади. Приклад1: Нехай граф G побудовано з трьох трикутників без спільних вершин та двох несуміжних ізольованих вершин, що з'єднані ребрами із кожною вершиною цих трикутників. Створимо подобу до графа G подавши її як φ-образ трьох різних $K_5\setminus u$, тобто квазізірки St=$St_2(K_5\setminus u)$, із центром G_1, $G_1=K_5\setminus u$ і двома висячими вершинами (g_1,g_2), суміжними із вершинами $g_1^{'},g_2^{'}$ графа $K_5\setminus u$, множина яких має число досяжності 2, та графа G_2 роду 1, створеного з G_{21},G_{22} двох копій графів $K_5\setminus u$ у яких пари несуміжних вершин (a_{21k},a_{22k}) ототожнені в пару вершин (a_1,a_2). Позначимо через M_2 множину $\{a_1,a_2\}$, а через M_1 множину $\{g_1^{'},g_2^{'}\}$, тоді єдиними ненульовими характеристиками цих множин будуть числа досяжності $t_{G_2}(M_2)=1$, $t_{St}(M_1)=2$. Нескладно впевнитися у виконанні співвідношення А в частині 2) та співвідношення Б теореми 1 для площинного графа G_1 та тороідаль-ного графа G_1, тоді маємо нерівність $\gamma(G)\le 0+1+2-1+1-1$. Якщо стиснути одне з ребер (g_1,a_1), (g_2,a_2), то отримаємо граф-обструкцію рода 2.

Висновок: Теорема 1 та її наслідки може використовуватися в алгоритмах побудови графів-обструкцій обмеженого орієнтованого роду.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. ХоменкоМ.П.φ-перетворення графів.препринт ІМНАНУ,Київ,1971,378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R.A. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech.1966 15 №1 129–135.
4 Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.
5. Youngs J.W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
6. Auslander L.Brown T.Youngs J.W.T.The embedding graphs in manifolds.J.Math. and Mech.12 1963 629-634.

7. Brown T. Duke R.A.An irreducible graph consisting a single block.J. Math. and Mech.1966 15 №1 129 – 135.

8. Duke R.Haggard G.The genus subgraphs K_8.Israel J.Math.11(1972) 452–455.

9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations betwen combinatorics and other parts mathematics.Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.

10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen.Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.

11. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlosenen Flachen.Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.

12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.

13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen.Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.

14. Петренюк В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2,2008,с.34-40

15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006.

16. Milgram M. Irreducible graphs.J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.

17. Milgram M.Irreducible graphs.J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.

18. Youngs J.W.Irreducible graphs.Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.

19. Gagarin A.,William K. Embedding graphs containing K_5-subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50, 2002.

20. Gagarin A., Myrvold W.,Chambers J.The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s.Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

21. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006.

22. Петренюк В. І. Об оценке рода специальних графов. деп. рукопис в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986.

23. Mohar Bojan. Face covers and the genus problem for apex graphs. J.Combin.Theory,B 2001.v.82 p.102-117.

24. Петренюк В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа.Искусст. интеллект.2004. т.,4.с. 34-45.

25. Петренюк В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусст. интеллект-2004", Кацивели,Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.

УДК 519.53+517.987

КРИТЕРИИ ПОДПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРНЫХ МЕР И СХОДИМОСТЬ ПОРОЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А.РОМАНОВ

Доведені теореми збіжності для лінійних операторів, які породжуються векторними мірами. Також отримані операторні критерії підпросторової неперервності векторних мір відносно різних типів збіжності.