З явного вигляду матриць $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ випливає, що матриці $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i=\overline{2,k}$ є голоморфними при $|x| \le x_0$ і матриця $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну за змінною ε при $(x,\varepsilon)\in J$.

На підставі результатів [1] та обмеженості матриці $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ при $(x,\varepsilon)\in J$ з рівності (5) отримаємо нерівність (6). Теорема доведена.

Висновки. Для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу одержані умови, при яких її розв'язками є розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 631 – 640.
2. Ключник І.Г., Завізіон Г.В. Про асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних рівнянь з відхиленням аргументу //Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13. № 2. – С. 161 – 176.
3. Ключник І.Г., Завізіон Г.В. Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу і точкою звороту // Укр. матем. вісник. – 2010. - Т.7, № 3.- С. 331-354.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

УДК 681.3.07

О ПРОСТЫХ РЕШЕНИЯХ ИЗВЕСТНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С.Т. КУЗНЕЦОВ

Розглянуті прості розв'язки трьох відомих задач, яким присвячена чисельна література протягом більш, ніж півсторіччя.

Simple solutions are considered the three known problems, which devoted numerous books for more than half a century.

Введение.

Приведём краткие сведения о трёх задачах.

Задача 1. Об уравнении с 2011-тью радикалами. Была предложена на последней Всеукраинской студенческой математической олимпиаде в Виннице. Сообщил Владислав Мельник, участник олимпиады, студент 3-го курса физико-математического факультета КГПУ им. В. Винниченко.

Задача 2. Задача о кокосовых орехах. По свидетельству М.Гарднера принадлежит к числу наиболее часто решаемых, но наименее поддающихся решению диофантовых головоломок [1]. Появилась в 1926 году.

Задача 3. Задача на определение одной фальшивой монеты (чуть более лёгкой или чуть более тяжёлой – неизвестно), путём взвешивания на чашечных весах без гирь среди заданного числа монет за минимальное число взвешиваний. Впервые о задаче заговорили в 1945 году [2]. Её решению посвящена вполне серьёзная литература. Это типичная задача теории информации.

По мнению автора все три задачи являют собой пример того, как плодотворная идея может сделать решение простым и конструктивным. В приведенных решениях всех трёх задач применён алгебраический подход. Последние две задачи – это явно *комбинаторные задачи логического типа*.

Задача с 2011-тью радикалами.

$\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+x}}}=x$ Всего в левой части уравнения 2011 радикалов.

Здесь важно заметить, что при бесконечном числе радикалов в левой части уравнение имеет вполне определённое решение, так как при возведении в квадрат обеих частей получим $1+x=x^2$.

Для нашего уравнения подходит только положительный корень $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – «золотое сечение». Но понятно, что если к бесконечности прибавить конечное число радикалов, например, 2011, то та же бесконечность и останется.

Поэтому найденное число является единственным корнем заданного уравнения.

Задача о кокосовых орехах.

Пять матросов и мартышка потерпели кораблекрушение и высадились на необитаемом острове. Весь первый день они занимались сбором кокосовых орехов. Вечером они сложили все орехи в кучу и легли спать. Ночью, когда все заснули, один из матросов встал. Он подумал, что утром при разделе орехов может вспыхнуть ссора, и решил взять свою долю орехов немедля. Поэтому он разделил все кокосовые орехи на пять равных кучек, а один оставшийся орех отдал мартышке. Затем он спрятал свою долю, а оставшиеся орехи снова сложил в одну кучу. Через некоторое время проснулся другой «робинзон» и сделал то же самое. У него тоже остался один лишний орех, и он отдал его мартышке. И так один за другим поступили все пятеро потерпевших кораблекрушение. Каждый из них взял себе одну пятую орехов из той кучи, которую он нашёл при пробуждении, и каждый отдал один орех мартышке. Утром они поделили оставшиеся орехи, и каждому досталось поровну – по одной пятой. В этот раз мартышка не получила ничего. Разумеется, каждый из матросов не мог не знать, что части орехов не хватает, но так как у каждого из них совесть была одинаково нечиста, то никто ничего не сказал. Сколько кокосовых орехов было первоначально?

Несмотря на кажущуюся сложность задачи при правильном подходе имеется возможность легко получить решение в общем виде.

Пусть матросов m ($m \geq 3$), а общее число орехов N_0. При этом N_1, N_2, N_3, …, N_{m-1}, N_m то число орехов, которое остаётся после того, как орехи забирают соответственно 1-й, 2-й, 3-й, …, m-1-й, m-й матросы.

Теперь важно заметить, что для нечётных m наименьшее $N_m = (m-1)^m - (m-1) = (m-1)((m-1)^{m-1} - 1)$, а для чётных m наименьшее $N_m = (m-1)^{m+1} - (m-1) = (m-1)((m-1)^m - 1)$.

Только в этом случае:

- моряки утром смогут разделить орехи поровну, так как показатель бинома Ньютона во вторых скобках чётный;
- числа N_{m-1}, N_{m-2}, N_{m-3}, …, N_1, N_0 будут натуральными, и для каждого из них вычет по модулю m будет равен 1, так как $N_{i-1} = N_i \dfrac{m}{m-1} + 1$.

Таким образом, для нечётных m получаем $N_0 = m^m - m + 1$, а для чётных m получаем $N_0 = (m-1)m^m - m + 1$.

Разумеется, в любом случае, путём прибавления к N_0 величины km^{m+1}, где $k = 1$, 2, 3, …, получаем бесконечно много решений в натуральных числах. Однако с увеличением m и минимальные решения быстро растут. Так при $m = 5$ $N_0 = 3121$, а при $m = 10$ $N_0 = 8999999991$.

Задача на определение фальшивой монеты.

Пусть монет тринадцать. Фальшивая чуть-чуть отличается по весу от настоящей – более лёгкая или более тяжёлая (неизвестно). За три взвешивания её нужно найти. При первом взвешивании кладём на чаши по четыре монеты, а пять остаются лежать в стороне. Если равновесие, то у нас есть восемь настоящих монет. При втором взвешивании сравниваем три из них с тремя из тех, которые не участвовали в первом взвешивании. Если равновесия нет, то известны три монеты, среди которых фальшивая, и уже известен её относительный вес. Третьим взвешиванием находим её, кладя на чаши по одной монете.

Если при втором взвешивании равновесие, то далее сравниваем с любой настоящей одну из двух оставшихся монет. Если она оказывается фальшивой, то автоматически становится известным её относительный вес. При равновесии та оставшаяся, которая ни разу не побывала на весах. Это единственный случай, когда не удаётся выявить относительный вес фальшивой монеты.

Теперь рассмотрим случай, когда при первом взвешивании нет равновесия. Назовём лёгкую чашу А, тяжёлую чашу В, а пять монет, оставшихся в стороне, – С.

Для второго взвешивания снимаем три монеты с чаши А. На их место кладём три монеты с чаши В, а чашу В дополняем тремя монетами из группы С. Возможны три случая:

- установилось равновесие, тогда фальшивая монета лёгкая среди тёх монет, снятых с чаши А;
- показание весов поменялось на противоположное, – фальшивая монета тяжёлая среди трёх перемещённых с чаши В на чашу А;
- показание весов не изменилось, тогда фальшивая либо лёгкая, которая при двух взвешиваниях была на чаше А, либо тяжёлая, оба раза оставшаяся на чаше В.

Как за одно взвешивание найти фальшивую монету, понятно. В третьем же случае достаточно сравнить одну из двух подозреваемых монет с настоящей, чтобы всё стало ясным.

Несложно, но важно понять одну вещь. *За n взвешиваний можно гарантировать определение фальшивой монеты с известным относительным весом, если число монет больше, чем* 3^{n-1}*, но не больше, чем* 3^n. Заметим только, что всегда можно разбить число подозреваемых монет либо на три равные, либо на три приблизительно равные части, две из которых обязательно равны. Таким образом, всегда есть возможность произвести взвешивание, которое сократит втрое или приблизительно втрое число подозреваемых монет. В итоге круг сузится до одной монеты.

Теперь укажем путь обобщения задачи.

Например, за четыре взвешивания можно найти отличающуюся по весу от настоящих среди 40 монет. При первом взвешивании на каждую чашу кладём по 13 монет (9+3+1). В стороне остаются 14 монет (9+3+1+1). При равновесии далее с настоящими сравниваем 9 монет. И, если фальшивая там, то найдём её за оставшиеся два взвешивания. Если 9 проверяемых монет настоящие, то задача сводится к предыдущей и завершается через два взвешивания.

Если при первом взвешивании равновесия нет, то на втором взвешивании перемещаем ($C \to B \to A \to$) по 9 монет и либо определяем те 9 монет, которые содержат фальшивую с известным относительным весом, либо, если все перемещаемые монеты настоящие (показание весов совпадает с предыдущим), то задача опять сводится к уже решённой.

Автор надеется, что заинтересованный читатель после приведенных объяснений сам сможет понять, как решается задача за n взвешиваний, если число монет больше, чем $\frac{3^{n-1}-1}{2}$, и не больше, чем $\frac{3^n-1}{2}$.

В качестве упражнений можно решить за семь взвешиваний задачу с 1001-ой монетой и за восемь взвешиваний – задачу с 2011-тью монетами.

Заключение.

Понятно, что простоту решения всех трёх задач обеспечивает рекурсия. И если в первой задаче «игра с бесконечностью – вещь известная», то вызывает удивление отсутствие в литературе решений второй и третьей задач, которые приведены в данной работе. Впрочем, они, может быть, просто не найдены.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Гарднер М., Математические головоломки и развлечения. Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Под ред. Я.А. Смородинского, М., «Мир», 1971, 511 с. с илл.

2. Гарднер М., Математические досуги. Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Под ред. Я.А. Смородинского, М., «Мир», 1972, 496 с. с илл.

УДК 532.59

РЕЗОНАНС ДРУГОЇ ГАРМОНІКИ ХВИЛЬОВОГО ПАКЕТУ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

В.В. НАРАДОВИЙ

Evolution equations on the contact surface and on the free surface in the form of nonlinear Schrödinger equations are obtained. The phenomenon of second harmonic resonance for a system of "layer with haid bottom - the layer with free surface" are investigates.

Получены уравнения огибающих на поверхности контакта и на свободной поверхности в виде нелинейных уравнений Шредингера. Изучено явление резонанса вторых гармоник для системы «шар с твердым дном – шар со свободной поверхностью».

Вступ. Більшість теоретичних досліджень з вивчення внутрішніх хвиль кінцевої амплітуди було пов'язано з аналізом хвильових рухів в системах, де внутрішні хвилі слабко нелінійні і є довгими по відношенню до глибини рідини [6, 12]. У статтях [1-5, 9, 11] досліджені двошарові системи виду «півпростір - півпростір», «шар - півпростір», «шар-шар», а також подано обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень.

У [2] досліджується форма хвильового пакету, а також умови резонансу другої гармоніки. Представлено умови поширення хвильових пакетів і встановлено характерні особливості резонансної області для системи "шар - шар". Аналогічні дослідження проведені в [1] для системи “шар - півпростір”. Також явище резонансу другої гармоніки досліджувалось в роботах [8, 10].

В даній статті досліджено явище резонансу другої гармоніки для системи «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

Постановка задачі та метод розв’язання. Математична постановка задачі про поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x,z): |x| < \infty, -h_1 \le z < 0\}$ і $\Omega_2 = \{(x,z): |x| < \infty, 0 \le z \le h_2\}$ з