УДК 517.95

СУЧАСНІ НАПРЯМИ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

В.М. ЄВЛАДЕНКО

Дається коротка характеристика сучасних напрямів розвитку класичної математичної логіки.

A short survey of present-day mathematical logic is presented in this paper.

Логіка (грецьк. **loqos** – слово, думка, розум) сукупність наук про закони і форми людського мислення, про математико-логічні закони числень (**формалізованих мов**), про найбільш загальні **(діалектичні)** закони мислення. Всі ці науки вивчають одне і те ж людське мислення, але відрізняються тим, які саме закони мислення складають їх предмет. Так, у **формальній логіці** досліджуються закони **вивідного знання**, тобто знання, одержаного із раніше встановлених і перевірених істин, опираючись тільки на закони і правила мислення. Формальна логіка складається із двох наук: **традиційної логіки** і **математичної логіки**.

Традиційна логіка [1] - це перша ступінь логіки вивідного знання, ніби арифметика логіки. Вона вивчає загальнолюдські закони логіки (**тотожності, протиріччя**, **виключеного третього, достатньої основи**), та досліджує їх застосування в процесі побудови **умовиводів**. Вона також вивчає загальнолюдські форми мислення (**судження** і **поняття**) та форми зв’язку думок в умовиводі (**індукція, дедукція, традукція, аналогія** і ін.), які об’єктивно відображають існуючі логічні закони і зв’язки між предметами і явищами реального світу.

Другою, вищою ступінню вивідного знання, ніби алгеброю формальної логіки, є **математична логіка** [2], в якій широко застосовуться математичні методи і спеціальний апарат формалізованих мов, так звані **числення**. Математична логіка вивчає в основному ті ж закони мислення, що й традиційна логіка, досліджуючи операції з тими ж самими формами міркувань, але іде істотно далі по шляху їх абстрагування. Це відкриває широкі можливості для пізнання нових закономірностей мислення, з якими приходиться зустрічатися при розв’язуванні складних логічних задач у математиці, кібернетиці, інформатиці, при проектуванні різного роду автоматів та ЕОМ.

Логіка як наука пройшла в своєму розвитку складний шлях від арістотелівської логіки до сучасних некласичних логік і охоплює часовий проміжок у 25 століть.

Вперше системний виклад формальної логіки як науки було здійснено Арістотелем (ІІІ ст.. до н.е.). Його праці «Органон», «Фізика», «Аналітики», «Риторика», «Метафізика» відіграли надзвичайно велику роль у всій подальшій історії розвитку логіки. Головною заслугою Арістотеля, перш за все, є те, що він розробив так звану **теорію силогізмів** (формальних виводів) та ввів у логіку змінні, що дало можливість сформулювати загальні логічні правила та закони. Ним також була вперше розроблена формально-логічна система, в якій була реалізована ідея **аксіоматичного методу**.

Філософи і логіки наступних поколінь (аж до середини XIX ст.) по суті обмежувались коментарями і викладом арістотелівської логіки.

Батьком математичної логіки вважається Лейбніц (ХУІІ ст.), який вперше запропонував ідею побудови **логічних числень** з використанням **формалізованих мов**. Основи ж сучасної двозначної математичної логіки, яку часто називають **класичною**, були закладені тільки в другій половині XIX ст. в наукових працях Буля, де Моргана, Фреге, Пірса, Джевонса, Шредера, Пеано та ін.

Буль – один із засновників математичної логіки - в основу своїх досліджень поклав аналогію між алгеброю і логікою та розробив відповідне логічне числення, в якому застосував закони й операції математики. Алгебро-логічний метод дав можливість Булю виявити нові типи висновків, які не враховувались у традиційній силогістиці. Він детально проаналізував закони комутативності, асоціативності та дистрибутивності.

Де Морган – засновник логічного аналізу - сформулював основні принципи логіки висловлювань і логіки класів. У математичній логіці Морган сформулював закони, які носять його ім'я.

Фреге заклав основи **логічної семантики**. У своїй фундаментальній праці «Основні закони арифметики» він побудував систему формалізованої арифметики на основі розробленого ним розширеного числення предикатів з метою обґрунтування ідеї зведення математики до логіки. Ідеї Фреге багато в чому наперед визначили розвиток логіки XX ст. Він першим увів поняття багатомісного предикати та символи для позначення кванторів.

Пірс – родоначальник **семіотики** (загальної теорії знаків) - у своєму численні використовував як **строгу**, так і **нестрогу диз'юнкції**. Він також сформулював закони **матеріальної імплікації** – імплікації, що використовується в класичній матлогіці.

Дещо пізніше (десь до середини XX ст.) великий вклад у розвиток математичної логіки внесли Гільберт, Уайтхед, Рассел, Пеано та ін.

Гільберт досяг значних успіхів у застосуванні методу формалізації, в тлумаченні логічних умовиводів, у розробці числення висловлювань та числення предикатів, у дослідженні аксіоматизації знань. Він здійснив строго аксіоматичну побудову геометрії Евкліда, що наперед визначило подальший розвиток досліджень в аксіоматизації наукового знання, запропонував розгорнутий план обґрунтування математики шляхом її повної формалізації. Щоправда ця програма виявилася нездійсненною, проте її ідеї сприяли виникненню **метаматематики** (теорії доведень).

Уайтхед у співавторстві з Расселом написав тритомну працю «Принципи математики», яка внесла значний вклад у подальший розвиток математичної логіки. У цій книжці ними розроблена мова сучасної логічної символіки, викладена теорія числення висловлювань і теорія класів, розвинута математична логіка способом аксіоматизації й формалізації числення висловлювань та числення предикатів. Ними також викладена теорія типів, вільна від **антиномій** (**парадоксів)** теорії множин, у тому числі і від відомого парадоксу Рассела: множина М є елементом М у тому і тільки у тому разі, коли М не є елементом М. Досліджено також логічні аспекти проблеми існування та дескрипції, природа деяких парадоксів тощо.

Подальший розвиток класичної математичної логіки був пов'язаний, в основному, з запитами математики та кібернетики. Великі заслуги тут належать Брауеру, Льюісу, Лукасевичу, Геделю, Посту, Гейтінгу, Колмогорову, Новікову, Генцену, Мальцеву, Заде та іншим відомим математикам та логікам.

На початку ХХ ст. в математичній логіці появляються нові напрями в її розвитку – це так звані **некласичні логіки (НЛ). НЛ** – це логічні системи, в основі яких лежить інше, ніж у класичній математичній логіці тлумачення традиційних логічних операцій: заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та кванторів. У деяких із **НЛ** до первісних логічних зв'язок (операцій) додають такі, як**: «можливо», «необхідно», «дозволено», «не визначено», «маю сумнів», «правдоподібно**» та ін.

Однією з перших систем некласичної логіки була **інтуїціоністська** [5], яка виникла у зв'язку з критикою одного з основних законів класичної логіки – **закону виключеного третього**. З такою критикою у 1908 р. виступив Брауер, виходячи з основного принципу інтуїціонізму: існування в математиці – це те ж саме, що **конструктивність** [6], тобто реальна можливість побудови математичного об'єкту.

Опираючись на цей принцип, була розроблена **конструктивна логіка (КЛ)**, в якій дослідження проводяться в рамках абстракції потенціальної здійсненності, де на нескінченність не можна дивитися як на щось готове і завершене. В **КЛ** дослідження обмежуються лише конструктивними об'єктами, існування яких вважається доведеним тільки тоді, коли вказується спосіб потенційно здійсненної побудови цих об'єктів. В **КЛ** вважається неправильним перенесення принципів, що застосовуються в області скінченних множин, на нескінченні множини. Виходячи з цього, в **КЛ** при виконанні логічних операцій в області нескінченних множин відмовляються від закону виключеного третього. Основи конструктивної логіки були закладені в роботах Брауера, Гейтінга, Колмогорова, а за останні півстоліття вона успішно розвивається математичною школою Маркова та його учнями. Конструктивісти критично ставляться до теорії множин Кантора й відмовляються визнавати її за основу для побудови математики, запропонувавши будувати її конструктивно. В КЛ вивчаються логічні аспекти конструктивної математики. Задачі конструктивної логіки поділяються на дві групи. До першої групи належать: побудова формалізованих мов конструктивної математики; до другої – вивчення класу конструктивно істинних формул і формального апарату логічного виведення конструктивної математики логічними методами.

З критикою так званих «парадоксів матеріальної імплікації», які суперечать інтуїтивному розумінню логічного слідування, пов’язується побудова **модальної логіки (МЛ)** [4], першу з яких розробив Льюіс (1912-1918рр), побудувавши числення, яке містить поняття **строгої імплікації**. Остання вільна від так званих парадоксів матеріальної імплікації: «з хибності випливає все що завгодно», «істина випливає з чого завгодно». З часом аксіоматичні системи **МЛ** були розроблені Геделем, Акерманом, Тарським, Генценом. В **МЛ** на рівні логіки висловлювань використовуються всі операції числення висловлювань, до яких додаються два модальних оператори: **оператор необхідності** та **оператор можливост**і, які відповідно читаються так: «Необхідно, що…» та «Можливо, що…».

Модальні логіки узгоджуються з класичною логікою в тому розумінні, що всі формули, які є правильними в модальній логіці і містять лише операції класичної логіки, є тотожно істинними, Більше того, переважна більшість модальних, деонтичних та інших логік базується на класичній логіці, тобто правилиним є й обернене твердження: будь-яка тавтологія класичної логіки є правильною й у цих некласичних логіках.

На сьогодні розроблено декілька аксіоматичних систем **МЛ**, але загальна теорія модальних систем поки відсутня.

Легко простежується зв'язок модальної логіки з **багатозначною логікою (БЛ)** [7] , оскільки самою простою системою модальної логіки є **трьохзначна логіка**, в якій крім значень «істинно» і «хибно” мається третє значення істинності – «**можливо»**. Більшість систем модальної логіки тісно пов’язані також із **імовірнісною логікою** [8] .

Алетична логіка – розглядає міркування, до складу яких входять модальні поняття типу : **«необхідно»,** «**можливо**», «**випадково**» та їх різновиди.

Аксіологічна логіка (логіка оцінок) – має справу з поняттями типу: «гірше», « добре», «краще», «погано», «байдуже» тощо.

Близькими до модальних логік є **деонтична логіка** (логіка норм)), в якій вводяться додатково оператори «**обов’язково»**, «**дозволено»** і «**заборонено»**, а також **часова логіка** (темпоральна), яка описує логічні зв’язки висловлювань про минуле, сучасне та майбутнє, одним з початкових операторів якої є оператор «**буде випадок, що**…».

ДЛ є одним із важливих розділів модальної логіки, в якій слово «**необхідно»** вживається у значенні «конче треба», а слово «можливо» – у значенні «допустимо». У контекстах, де трапляється така смислова трасформація слів «необхідно» і «можливо», «конче треба» і «допустимо», вказують, наприклад, на моральну чи юридичну відповідальність, допустимість. Нормативні вирази становлять предмет вивчення деонтичної логіки.

Окремим розділом модальної логіки є **епістемічна логіка**, в якій розглядаються міркування, що включають поняття «спростовано», «нерозвязано». «доведено», « сумнівається» та вивчаються модальності типу «**знаю», «вірю», «маю сумнів**» і відповідні вирази «**хтось знає, що…», «хтось вірить, що…», « хтось має сумнів у тому, що…».**

Усі наведені модальності мають як загальні риси, так і свої специфічні особливості. З урахуванням наявності останніх слід мати на увазі, що перелічені аспекти модальностей формально незвідні один до одного, хоч і не відокремлені нездоланною стіною.

Тризначна логіка (ТЛ) – це логіка, яка поряд з висловленнями А і $\overline{A}$ допускає третю можливість - невідомо, А або $\overline{A}$. Першою системою **ТЛ** є логіка, розроблена у 1920 р. Лукасевичем. В ролі третього значення істинності судження він ввів значення, що виражається словами «**можливо», «нейтрально».** Таке значення висловлення розглядалось ще в арістотелівській логіці як наближення до істинності або хибності в міру виявлення їх відповідності реальній ситуації.

В тризначному численні Бочвара змінні, якими позначаються висловлення, можуть приймати значення «**істинне», «хибне»** і **«нісенітниця».** В тризначній логіці Кліні в ролі третього значення істинності використовуються слова «**не визначено», «невідомо», «не істотно»**. Пізніше Лукасевич запропонував **чотирьохзначну і багатозначну логіки (БЛ),** на базі яких були детально розроблені **к-значні логіки** [7] . В багатозначній логіці значенням істинності висловлення може бути будь-яке дійсне число в проміжку від 0 до 1. Значення істинності в **БЛ** може розглядатися як імовірність правильності твердження. Висловлення, які завжди набувають значення 1, є тавтологіями цієї логіки. Незалежно від Лукасевича у 1921р. систему багатозначної логіки побудував і Пост.

Чимало досліджень у галузі багатозначних логік стосується проблеми функціональної повноти. Як правило, некласичні логіки, які містять лише традиційні логічні операції, є частиною класичної логіки. При цьому всі формули, істинні в будь-якій з некласичних логік, є, як правило тавтологіями класичної логіки. Так само з класичною логікою узгоджується і модальна логіка.

Прикладом багатозначної логіки є **імовірнісна логіка (ІЛ**), яка досліджує висловлення, що приймають не тільки два значення істинності (0 і 1), а множину степенів їх правдоподібності, тобто істинністні значення висловлення містяться в проміжку від 1 до 0. Оскільки в **ІЛ** аналізуються висловлення, що приймають більше двох істиннісних значень, вона є одним із видів багатозначної логіки.

Деякі проблеми **ІЛ** ставив ше Арістотель, зокрема, він досліджував силогізми з імовірнісними судженнями. В повороті логіки до проблеми імовірності значну роль відіграв і Лейбніц. Одним із серйозних недоліків старої логіки він вважав відсутність у ній степенів імовірності істинності судження. Сам він визначав імовірність істинності, як міру нашого знання про ті чи інші об'єкти. В ХІХ-ХХ ст. проблеми **ІЛ** розглядались в роботах Буля, Джексона, Карнапа, Колмогорова та ін. Все, що знаходиться між істиною і хибністю, називається в імовірнісній логіці **гіпотезою (припущенням**). А оскільки як в природничих, так і суспільних науках, у виробничій практиці та житті гіпотези займають важливе місце, то стає очевидним значення **ІЛ**.

Багатозначні логіки знаходять широке застосування при розв'язуванні парадоксів класичної математичної логіки, в квантовій механіці, в теорії релейно-контактних схем. Але застосовуючи багатозначну логіку, необхідно весь час мати на увазі, що введення таких значень істинності як «можливість», «необхідність», «імовірність» і т.ін. не усуває основної проблеми – встановлення істинності або хибності судження. Імовірнісні, можливі, нечіткі і тому подібні судження рухають науку до пізнання істини, але обмежуватися тільки такими судженнями ні одна наука не може.

Проблеми багатозначної логіки і шляхи її застосувань в науці і техніці висвітлені в роботах Поста, Рассела, Яблонського, Бочвара, Неймана, Шестакова та ін.

Критика методів класичної математики, яка стверджує необхідність обмеження їх застосувань, викликана виявленням парадоксів у наївній теорії множин. Ці парадокси вдалось усунути, опираючись на некласичні логіки, зокрема на тризначну логіку Бочвара. В ній розглядають висловлення, які мають смисл, і беззмістовні висловлення. Твердження, які виражають парадокси теорії множин, виявляються тут **безглуздими**.

З інших застосувань багатозначних логік слід відзначити побудову спеціальних логічних систем для подолання труднощів у вивченні квантової механіки. В 1936 р.Біркгоф опублікував перші роботи з **логіки квантової механіки**. Різні некласичні логіки будують при доведенні незалежності систем аксіом, зокрема, для класичної логіки. Щоб довести, що якусь аксіому не можна вивести з інших, досить знайти багатозначну логіку, в якій правильними є всі аксіоми, крім досліджуваної. Російський логік Зінов'єв розробив так звану **комплексну логіку** [4].

Вивчаючи некласичні логіки, значну увагу приділяють з'ясуванню зв'язків між різними логіками. Крім звичайного відношення включення (всі правильні формули однієї логіки є тавтологіями в іншій), великий інтерес становить перехідність однієї логіки в іншу. Наприклад, за будь-якою формулою інтуїціоністської логіки можна побудувати формулу модальної логіки, тавтологічність якої в модальній логіці еквівалентна правильності первісної формули в інтуїціоністській логіці. Це дає змогу звести багато проблем інтуїціоністської логіки до проблем модальної логіки.

За останні десятиліття в некласичних логіках одержані ряд важливих результатів, які сприяють подальшому розвитку математичної логіки. Некласичні логіки не усувають класичну, вони вказують ряд напрямів, які розробляють нові проблеми логіки і відшукують нові засоби і методи логічних досліджень, шляхи практичного застосування сучасної математичної логіки в науці і техніці.

Будуючи й досліджуючи різного роду кібернетичні моделі [9], також часто стикаються з некласичними логіками. Так, наприклад, при прогнозуванні й діагностиці використовують деякі різновиди модальної логіки, при дослідженні роботи керуючих пристроїв – різні форми **часових логік, логіку запитань і відповідей** тощо. Апарат багатозначної логіки зручний для розв'язування проблем аналізу і синтезу керуючих систем, для розробки методів контролю за їх роботою [10]. Отже, математика, кібернетика та інформатика, з одного боку, є споживачами некласичних логік, а з другого – джерелом їх виникнення і розвитку.

Починаючи з 60-х років XX ст. американський вчений Заде – автор теорії так званих **нечітких підмножин**, заклав основи **нечіткої логіки (НЛ)**, як одного з напрямів **неокласичної логіки** (новітньої некласичної логіки). Її практичне призначення – дослідження проблем штучного інтелекту.

На відміну від Брауера і його послідовників Заде вирішив зблизити актуальну і потенціальну нескінченності, взявши для некласичних підмножин в ролі базових понять своїх теоретичних досліджень такі як: **«нечіткість», «неясність», «випадковість», «можливість», «правдоподібність».** Традиційну теорію множин він розглядає як окремий випадок теорії нечітких підмножин, намагаючись подолати суперечність між формалізмом і конструктивізмом, між актуальною і потенціальною нескінченностями.

Заде протиставляє двозначній і навіть багатозначній логіці логіку з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками та нечіткими висновками. На його думку, саме нечітка логіка, яка ще не досить вивчена, відіграє основну роль у здатності людського мислення вибирати з широкого інформаційного потоку лише ті відомості, які мають хоча б опосередковане відношення до розв'язуваної задачі. Він запропонував розглядати нечіткі логіки не тільки з числовими, а і з лінгвістичними значеннями істинності. Згідно з цим висловлення може набувати істиннісних значень типу: **«істинне», «хибне», «абсолютно хибне», «абсолютно істинне», «не зовсім істинне», «не зовсім хибне»** тощо. Кожне таке значення представляє нечітку підмножину одиничного проміжку [0,1] .

У реальному житті часто трапляються випадки, коли просто необхідно враховувати неясність і неточність інформації про явища й процеси навколишнього світу, а тому нечітка логіка – це цікава й багатообіцяюча спроба дати хоча б схематичний пошук розв'язання подібних проблем.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кондаков Н.И. Логический словарь, -М.: Наука, 1971.
2. Глушков В.М. Введение в кибернетику. –Киев: Изд. АН УССР, 1964.
3. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. –М.: Наука, 1967.
4 Зиновьев А.А. Неклассическая логика. –М.:Наука, 1970.
5. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М.: Наука, 1965.
6. Марков А.А. О констуктивной математике. //Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР.-М.: АН СССР, 1962, т. 67.
7.Яблонский С.В. Функциональные построения в к-значной логике. //Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –М: АН СССР, 1958, т.51.
8. Яглом А.М.. Яглом И.М. Вероятность и информация. –М.: Наука, 1957.
9. Енциклопедія кібернетики. –Київ: ГР УРЕ, 1973, т.1.
10. Яблонский С.В. Применение логики в науке и технике. –М.: Наука,1960.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Г.В. ЗАВІЗІОН, І.Г. КЛЮЧНИК

Пропонується асимптотичний метод дослідження коливних імпульсних систем диференціальних рівнянь

We propose the asymptotic method of study the oscillatory system of differential equations.

Вступ. В [1] пропонується асимптотичний метод інтегрування $m-$ частотної коливної системи, а також встановлена математична відповідність між положеннями рівноваги амплітудних усереднених рівнянь $m-$ частотної коливної системи і інваріантними торами простору $C^{l-2}(F_m)$.

В даній статті пропонується асимптотичний метод дослідження $m-$ частотної коливної імпульсної системи диференціальних рівнянь і встановлено асимптотичну властивість розв'язків.

Асимптотичний метод дослідження. Розглянемо систему з фіксованими моментами часу вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x,\varepsilon),\ t \neq t_i, \tag{1}$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = Ix + \varepsilon I(x,\varepsilon),$$

де $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n),\ \lambda_j > 0,\ j = \overline{1,n};\ H = diag(H_1 \dots H_n);\ X(x,\varepsilon),\ I(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями ε, з коефіцієнтами $X_\nu(x), I_\nu(x)$, які належать кільцю поліномів $K[x]$ над $R,\ x \in R^{2n}$.