УДК 518.3 / 681.142.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В APS

П. Н. Денисенко

Аннотация

Представлена процедура системи алгебраїчного програмування APS. Ця процедура обчислює головну власну функцію лінійного інтегрального оператора. Коефіцієнти цього оператора є алгебраїчні поліноми. Доведена ефективність процедури, алгоритму процедури та методу процедури.

We presented the procedure of the algebraic programming system APS. This procedure solve eigenvalue problem for linear integral operator. The coefficients of this operator is algebraic polinomials. We proved the efficient: this procedure, the algorithm of this procedure, the method of this procedure.

Задача. Построить процедуру системы APS [1] (алгебраического программирования). Эта процедура имеет следующие *вход* и *выход.*

$$INPUT = (\ L[y]+g\ ,\ d\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,\quad \text{где}\ \ L[y]+g\in A_3\ : \quad (1)$$

$$L[y]=\int_{c_1(x)}^{d_1(x)} K_1(x,t)\cdot y(t)+\cdots+\int_{c_p(x)}^{d_p(x)} K_p(x,t)\cdot y(t)\,dt\ , \quad (2)$$

ядра $K_1(x,t),\ldots,K_p(x,t)$, пределы интегрирования $c_1(x),\ldots,$ $c_p(x)$, $d_1(x),\ldots,d_p(x)$ и свободный член $g=g(x)$ — полиномы,

$$solve(\ L[y]+g=(L[y]+g)|_{x=d}\cdot y,\ y=?\ )=y(x)\ ,\quad x\in[a,b]\,. \quad (3)$$

$$OUTPUT\ =\ y_n=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n\approx y(x)\ . \quad (4)$$

$$C_n(\ procedure\ ,\ L[y]+g\in A_{3,C_{[a,b]}}\ ,\ d\ ,\ C_{[a,b]}\ )=$$
$$\|y-y_n\|_{C_{[a,b]}}/\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}}=O(1)\ . \quad (5)$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ *коэффициент оптимальности процедуры — преобразования этой процедурой оператора* $L[y]+g$ *(2) класса* $A_{3,C_{[a,b]}}$ *в многочлен* y_n (4) *ограничен* (y_n (4) — аппроксимация решения $y(x)$ уравнения (3) оптимальная среди полиномов вида (4)). *Класс* $A_{3,C_{[a,b]}}$ *операторов вида* A_3 *представительный.*

Актуальность задачи. Интегральные уравнения являются классическим аппаратом математического моделирования [2]. Уравнения (3) используют в математических моделях часто.

Классической модельной задачей для вычисления собственных функций является задача о форме собственных колебаний струны

$$y'' = -\lambda^2 \cdot y\ , \qquad y(0) = 0\ , \qquad y(1) = 0$$

$$\sim \quad y = -\lambda^2 \cdot (\int_0^x (1-x) \cdot t \cdot y(t)\,dt + \int_x^1 (1-t) \cdot x \cdot y(t)\,dt\ )\ . \quad (6)$$

Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, APS, Derive и другие СКА (системы компьютерной алгебры) *стали средой математического моделирования. СКА не решают интегральные уравнения (3). По методам ряда Чебышева* построены [2] (с. 275 – 348) алгоритмы для решения отдельных интегральных уравнений. *СКА выполняют только часть преобразований этих алгоритмов.*

1. Метод Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$

$$Galerkin_{L_2(a,b;\rho)}(\ L[y] + g = (L[y]+g)|_{x=d} \cdot y\ ,\ n\ ) =$$

$$y_n = solve(\ S_n[L[y] + g - (L[y]+g)|_{x=d} \cdot y]|_{y=(y_n \in H_n[a,b])} = 0\ ), \quad (7)$$

где оператор S_n вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции $y(x) \in L_2(a,b;\rho)$ на отрезке $[a,b]$

$$S_n[y] = a_0(y) \cdot cheb(0, z(x)) + \cdots + a_n(y) \cdot cheb(n, z(x))\,, \quad (8)$$

$$(y_n \in H_n[a,b]) = c_0 \cdot cheb(0, z(x)) + \cdots + c_n \cdot cheb(n, z(x))\,, \quad (9)$$

$c_0, \ldots, c_n \in Atom$. Многочлены (8), (9) — алгебраические и являются элементами пространства $H_n[a,b]$. $H_n[a,b]$ — линейная оболочка элементов базиса пространства Гильберта $L_2(a,b;\rho)$

$$\{\ cheb(i,z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\ \}_{i=0}^{\infty}\ ,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1 \quad (10)$$

с индексом $i = 0, \ldots, n$ (многочленов Чебышева первого рода).

Метод Галеркина является классическим проекционным методом решения операторных уравнений. Этот метод детально исследован [3] (глава 4) и доказана теорема существования и сходимости.

Метод 1. Композиция методов: простой итерации и Галеркина.

1. Вычислить начальное приближение $y_{n,0} = 1$.
2. Вычислить последовательность многочленов

$$y_{n,s} = S_n[L[y_{n,s-1}] + g]/S_n[L[y_{n,s-1}] + g]|_{x=d}\ , \quad s = 1, 2, \ldots\ . \quad (11)$$

3. Вычислить предел последовательности полиномов (11)

$$OUTPUT = y_n = method_1(\ L[y]+g,\ d,\ [a,b],\ n\ ) = \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,. \quad (12)$$

2. Алгоритм 1 для вычисления полинома $y_{n,s}$ (11)

$$INPUT = (\ L[y]+g \in A_3\ ,\ y_{n,s-1} \in P_n\ ,\ d\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,. \quad (13)$$

1. Вычислить многочлен

$$L_s(x) = (L[y_{n,s-1}]+g)/(L[y_{n,s-1}]+g)|_{x=d}\,. \quad (14)$$

2. Вычислить многочлен

$$L_s(z) = subs(\ x = h*(z-1)/2+a\ ,\ L_s(x)\ )\,. \quad (15)$$

3. Привести многочлен (15) к каноническому виду

$$canplf(L_s(z)) = c_0 + c_1\cdot z + \cdots + c_m\cdot z^m\,. \quad (16)$$

4. Вычислить коэффициенты многочлена (16)

$$Coef(canplf(L_s(z))) = \{\ c_0,\ c_1, \ldots, c_m\ \}\,. \quad (17)$$

5. По алгоритму Кленшоу [2] преобразовать коэффициенты (17) в коэффициенты Фурье - Чебышева многочлена $L_s(z)$

$$\{C_0,\ C_1, \ldots, C_m\} = Clenslaw(\{\ c_0,\ c_1, \ldots, c_m\ \})\,. \quad (18)$$

6. Вычислить многочлен

$$S_{n,[-1,1]}[L_s(z)] = C_0\cdot cheb(0,z) + \cdots + C_n\cdot cheb(n,z)\,. \quad (19)$$

7. Вычислить многочлен (11)

$$y_{n,s} = S_n[L_s] = subs(z = 2\cdot(x-a)/(b-a)-1\ ,\ S_{n,[-1,1]}[L_s(z)])\,. \quad (20)$$

Из алгоритма 1 и алгоритма Кленшоу [2] следует утверждение.

Лемма 1. *Все преобразования алгоритма 1 — алгебраические.*

3. Программирование алгоритма 1 в APS

$$INPUT = (\ \mathtt{Ly}\ ,\ \mathtt{d}\ ,\ \mathtt{y\_n}\ ,\ \mathtt{z}\ ,\ \mathtt{u}\ ,\ \mathtt{n}\ )\,. \quad (21)$$

Структура данных на входе.

```
Ly  =  int_op(c_1, d_1, K_1 * y, t)  + ··· +
       int_op(c_p, d_p, K_p * y, t)  +  g  ; ~
```

$$L[y]+g=\int_{c_1(x)}^{d_1(x)} K_1(x,t)\cdot y(t)+\cdots+\int_{c_p(x)}^{d_p(x)} K_p(x,t)\cdot y(t)\,dt+g(x)\,.$$

`y_n = f * x ^ n + ··· + p` $\sim$ $y_{n,s-1}=f\cdot x^n+\cdots+p$, (22)

`d` $\sim$ $d\in R$,

`z` $\sim$ $z(x)=2\cdot(x-a)/h-1$,

`u` $\sim$ $z^{-1}(x)=h\cdot(x+1)/2+a$,

`n` $\sim$ $n\in N$,

$h=b-a$, `g, c_1,...,c_p, d_1,...,d_p, K_1,...,K_p` — термы атомов `x, t` и констант (чисел) с операциями `*`, `+`, `^`.

APLAN - процедура 1. Запись алгоритма 1 на языке APLAN. Операторы этой процедуры построены в [4] для a-метода Дзядыка.

```
L_s := sub_i_u(Ly , y_n);                  /*  L[y_n] + g  */
L_s_d := 1/canplf(subs(x = d, L_s )      /*  1/L_s(d)  */
L_s_n := canplf( L_s_d * L_s      )  /*  L_s / L_s(d)  */
L_s_z := canplf(subs(x = u, L_s ) /*  L_s(u) / L_s(d) */
  m := deg( L_s );                         /*  deg( L_s )  */
  Coef_pol(L_s_z,m);                  /*  c_0 , ... , c_m  */
  Coef_Cheb(m);                       /*  C_0 , ... , C_m  */
y_z := Cheb( COEF, n );  /* S_{n,-1,1}[L_s(z)/L_s(d)] */
y_n := canplf(subs(x = z, y_z)); /*  S_n[L_s/L_s(d)]  */
```

Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1.

`L_s` $\sim L[y_{n,s-1}]+g$, `L_s_n` $\sim L_s(x)$, `L_s_z` $\sim L_s(u)$

— полиномы атома `x` и констант (чисел) с операциями `*`, `+`, `^`.

Оператор `Coef_pol(L_s_z,m)` вычисляет коэффициенты Тейлора `COEF` $\sim\{c_0,\ c_1,\ldots,c_m\}$ (17) полинома `L_s_z` .

Оператор `Coef_Cheb(m)` преобразует коэффициенты Тейлора $\{c_0,\ldots,c_m\}$ (17) в коэффициенты Чебышева $\{C_0,\ldots,C_m\}$ (18).

`y_z := Cheb( COEF , n )` $\sim S_{n,[-1,1]}(L_s(z)/L_s(d))$ (19)

— частная сумма порядка n ряда Чебышева (полином). `COEF` — коэффициенты (18) этого полинома. `y_n` — многочлен вида (22).

4. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Если операнды (21) имеют рациональные константы, то APLAN - процедура 1 выполняет все преобразования точно.*

Доказательство. Согласно лемме 1, преобразования алгоритма 1 — алгебраические. Система APS (а также Maple, Mathematica, Mathcad и другие СКА) выполняет арифметические операции с рациональными числами в арифметике рациональных чисел, т. е. без погрешностей [1], [4] (точно). Следовательно. Если операнды алгебраического преобразования имеют целые или рациональные константы, то APS выполняет это преобразование точно.

Теорема 2. *Для сложности преобразования APLAN - процедурой 1 входа (21) справедливо тождество*

$$Q(APLAN\!-\!procedure\,1(\ L[y]+g\in A_3,\ d,\ y_{n,s-1}\in P_n,\ [a,b],\ n\ ))$$
$$=O(n^3)+3\cdot Q(canplf(P_m))+Q(\texttt{sub\_i\_u(Ly, y\_n)})+$$
$$Q(cheb(0,x)+\cdots+Q(cheb(n,x)\ ,$$

где $Q($ `sub_i_u(Ly , y_n)` $)$ *— сложность преобразования оператором* `sub_i_u` [4] *оператора* `Ly` (1) *и полинома* `y_n`, $Q(canplf(P_m))$ — сложность преобразования оператором $canplf$ алгебраического полинома порядка m (коэффициенты – числа), $Q(cheb(i,x))$ — сложность вычисления полинома $cheb(i,x)$ (10).

Доказательство. APLAN - процедура 1 — линейная. Сложность замены в многочлене порядка m атома `x` на моном `c * x + d`

$$Q(\ \texttt{subs(x = c * x + d, L\_s)}\ )=O(m)\ .$$

Сложность вычисления порядка полинома канонического вида

`L_s_z = canplf( L_s_z );` — $Q($ `deg( L_s_z )` $)=O(1)$.

Для интегрального оператора (3) и многочлена вида (4)

$$m=\deg(\int_{c_i(x)}^{d_i(x)}K_i(x,t)\cdot y_n(t)\,dt)=n\cdot s+O(1)=$$

$(n+1+\deg_x(K_i(x,t))+\deg_t(K_i(x,t)))\cdot\max\{\ \deg(c_i(x)),\ \deg(d_i(x))\ \}$.

Сложность преобразования многочлена канонического вида в его m коэффициентов — $Q($ `Coef_pol(L_s_z,m)` $) = O(m^2)$.

Сложность преобразования коэффициентов Тейлора полинома в его коэффициенты Чебышева по алгоритму 14.3 [2] (с. 261).

$$Q(\ \texttt{Coef\_Cheb(m)}\ ) = O(m^2)\ .$$

Решение APLAN - процедурой 1 модельной задачи (6)

Описание на языке APLAN входа (21) для уравнения (6).

```
process[1] := (
        Ly := int_op(0, x, (-1 * (x + -1) * t) * y, t) +
              int_op(x, 1, (-1 * x * (t + -1)) * y, t) ;
         d := 1/2 ;          y_n := 1 ;
         u := 1/2 * x + 1/2 ;  z := 2 * x + -1 ; ... ) ;
```

Преобразование APLAN - процедурой 1 этого входа ($n = 10$).

```
L_s := sub_i_u(Ly, y_n) = x ^ 2$rat(-1,2) + x$rat(1,2) ;
L_s_d := 1/canplf(subs(x = d, L_s ) =                8 ;
L_s_n := canplf( L_s_d * L_s ) =   x ^ 2 $ -4 + x $ 4 ;
L_s_z := canplf(subs(x = u, L_s ) =    1 + x ^ 2 $ -1 ;
  m := deg( L_s_z ) =                                2 ;
  Coef_pol(L_s_z,m) =                    ( 1 , 0 , -1 ) ;
  Coef_Cheb(m);           ( rat(1,2) , 0 , rat(-1,2) ) ;
 y_z := Cheb( COEF, n ) = rat(1,2) +
                          rat(-1,2) * (2 * x ^ 2 + -1) ;
y_n := canplf(subs(x = z, y_z) =   x ^ 2 $ -4 + x $ 4 ;
```

5. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают утверждения.

Теорема 3. *Если операнды (13) имеют рациональные константы, то СКА выполняют все преобразования алгоритма 1 точно.*

Теорема 4. *Сложность преобразования по алгоритму 1 входа (13) — полиномиальная по параметру* n .

6. Оптимальность метода 1 по точности

В пространстве X класс $A_{3,X}$ (5) интегральных операторов вида (2) определяют условия теоремы сходимости метода Галеркина (7) [3] (глава 4). Главное требование этой теоремы.
В пространстве X уравнение (3) является корректной задачей.
Если в пространстве X ограничен оператор обратный оператору

$$L[y]-(L[u]+g)|_{x=d}\cdot y\ ,\quad \text{где}\ \ \|u(x)-y(x)\|_X\le\varepsilon\ ,$$

$y(x)$ — решение уравнения (3), то это требование выполняется.
Для многочленов $S_n[y]$ (8) справедливы [2] (с. 53, 71, 77) оценки

$$\|y-S_n[y]\|_X\le(\|S_n\|_X+1)\cdot\inf_{c_0,\dots,c_n}\|y(x)-(c_0+\dots+c_n\cdot x^n)\|_X\ ,$$

$$\|y-S_n[y]\|_{L_2(a,b,\rho)}\ =\ \inf\nolimits_{c_0,\dots,c_n}\|y(x)-(c_0+\dots+c_n\cdot x^n)\|_{L_2(a,b,\rho)}\ ,$$
$$\|S_n\|_{L_2(a,b;\rho)}=1\ ,\ \ \|S_n\|_{C_{[a,b]}}=(4/\pi^2)\cdot\ln(n)+O(1)\ ,\ \ O(1)\le 3\ .$$

Следовательно, согласно теореме о сходимости метода Галеркина (7) [3]. *Классы $A_{3,L_2(a,b;\rho)}$ и $A_{3,C_{[a,b]}}$ (5) операторов $L[y]+g\in A_3$ (2) уравнений (3) являются представительными.*

Эффективность решения по методу 1 модельной задачи.
Многочлен — решение уравнения (6) по методу 1 $y_n=$

$$method\ 1(\int_0^x(1-x)\cdot t\cdot y(t)\,dt+\int_x^1(1-t)\cdot x\cdot y(t)\,dt,\ 1/2,\ [0,1],\ n\ )$$

аппроксимирует главное решение уравнения (6) $y=\sin(\pi\cdot x)\ =$

$$solve(\ y=-\lambda^2\cdot(\ \int_0^x(1-x)\cdot t\cdot y(t)\,dt+\int_x^1(1-t)\cdot x\cdot y(t)\,dt\ )\ .$$

Погрешность этой аппроксимации принимает следующие значения

$$\{\|y-y_{2\cdot i}\|_{C_{[0,1]}}=\|y-y_{2\cdot i+1}\|_{C_{[0,1]}}\ \}_{i=0}^{8}\ =\{0.5,\ 0.03,\ 0.00065,\ 7\cdot10^{-6},$$
$$4.8\cdot10^{-8},\ 2.2\cdot10^{-10},\ 7.6\cdot10^{-13},\ 2.4\cdot10^{-15},\ 8\cdot10^{-16}\}\ . \qquad (23)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева главного решения уравнения (6) $y=\sin(\pi\cdot x)$ *на отрезке* $[0,1]$ принимают следующие значения

$$\{\ a_{2\cdot i+1}(y,[0,1]),\ \}_{i=0}^{\infty}=0\ ,$$

$$\{\ a_{2\cdot i}(y,[0,1]),\ \}_{i=0}^{8} \ =\ \{0.47,\ -0.5,\ 0.028,\ -0.0006,\ 6.7\cdot 10^{-6},\ -4.7\cdot 10^{-8},\ 2.2\cdot 10^{-10},\ -7.5\cdot 10^{-13},\ 1.9\cdot 10^{-15}\ \}\ . \qquad (24)$$

С ростом параметра i , коэффициенты (24) регулярно убывают

$$\{\ |a_{2\cdot i+2}(y,[0,1])|/|a_{2\cdot i}(y,[0,1])|\ \}_{i=0}^{7} = \{\ 1.06,\ 0.056,\ 0.021,\ 0.011,\ 0.0069,\ 0.0047,\ 0.0034,\ 0.0025\ \}\ .$$

Функция $\sin(\pi\cdot x)$ — целая. $\|cheb(i\cdot x)\|_{C_{[-1,1]}} = 1$. Следовательно

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x)-(c_0+\dots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[0,1]}} = (1+\beta_n)\cdot|a_{2\cdot[n/2]+2}(y,[0,1])|\ ,$$

где $\{|\beta_{2\cdot i}| = |\beta_{2\cdot i+1}|\}_{i=2}^{7} \approx \{0.25,\ 0.12,\ 0.08,\ 0.06,\ 0.05,\ 0.04\} = o(1)$.

В пространстве $C_{[0,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y(x) = \sin(\pi\cdot x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *имеет главную часть* $|a_{2\cdot[n/2]+2}(\sin(\pi\cdot x),[0,1])|$ (24).

Из этого тождества и тождеств (23), (24) следует заключение.

Вывод 1.

$$C_n(\ method\,1\ ,\ \int_0^x (1-x)\cdot t\cdot y(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)\cdot x\cdot y(t)\,dt\ ,\ 0.5\ ,\ C_{[0,1]}\ ) = (1+o(1))\cdot(1+\alpha_n)\ ,\quad \text{где}\quad 1+\alpha_n = \|y-y_n\|_{C_{[0,1]}}/|a_{2\cdot[n/2]+2}(y,[0,1])|\ .$$

Коэффициент оптимальности (5) преобразования по методу 1 уравнения (6) в полином y_n *вида (4)* (аппроксимацию решения $y(x) = \sin(\pi\cdot x)$ уравнения (6)) *в пространстве* $C_{[0,1]}$ *имеет главную часть* $1+\alpha_n$ *и она принимает следующие значения*

$$\{1+\alpha_{2\cdot i} = 1+\alpha_{2\cdot i+1}\}_{i=0}^{5} \ =\ \{\ 1,\ 1.1,\ 1.09,\ 1.05,\ 1.02,\ 1.01\ \}\ .$$

Замечание 1. Если y_n — полином вида (4) порядка n, то

$$\|y-y_n\|_X \ \geq\ \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x)-(c_0+\dots+c_n\cdot x^n)\|_X = E_{n,X}[y]\ .$$

Следовательно. В пространстве X коэффициент оптимальности (5) метода $method$ преобразования операторного уравнения

$$F[y]=0\ ,\ \ solve(\ F[y]=0\ ) = y(x)\ ,\ \ x\in[a,b]\ ,\ \ y\in X\ ,$$

в частности, интегрального (3), в полином y_n вида (4) порядка n

$$C_n(\ method\ ,\ F[y]=0\ ,\ X\ ) = \|y-y_n\|_X/E_{n,X}[y] \geq 1\ .$$

Заключение

APLAN - процедура 1 позволяют исследовать математические модели объектов, определяемых интегральными уравнениями вида (3). Доказана эффективность APLAN - процедуры 1.

1. *APLAN - процедура 1 преобразуют оператор* $L[y]+g \in A_3$ *(2) в полином* y_n *(4) порядка* $n \in N$.
2. *Преобразования APLAN - процедуры 1 — алгебраические.*
3. *Сложность APLAN - процедуры 1 — полиномиальная по* n.
4. *СКА выполняют преобразования APLAN - процедуры 1.*
5. *Если операнды входа APLAN - процедуры 1 имеют рациональные константы, то*

СКА выполняют преобразования APLAN - процедуры 1 точно.

Доказана эффективность метода 1 (основания APLAN - процедуры).

В пространстве $C_{[a,b]}$ *коэффициент оптимальности* (5) *преобразования по методу 1 интегрального оператора* $L[y]+g$ (2) *класса* $A_{3,C_{[a,b]}}$ *в полином* y_n *(4) ограничен.*

Класс $A_{3,C_{[a,b]}}$ *операторов типа* A_3 *представительный.*

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности аппроксимации решения $y(x)$ уравнения (3) (оператор $L[y]+g \in A_{3,C_{[a,b]}}$) полином y_n (4) имеет порядок величины наилучшего приближения функции $y(x)$ алгебраическими полиномами порядка n.

Библиография

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.
2. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. – 1969. – 456 с.
4. Денисенко П. Н., Летичевский А. А. (науч. ред.). *Алгебраическое программирование.* — Кировоград: КННПК. — 2002. — 120 с.