$$\left|P_n(f,x)-f(x)\right| \le$$

$$\omega(1/\sqrt{n})\left(1+\frac{n}{n-3}\left(\left(\frac{nx+1}{n-2}\right)^2+\frac{nx^2+2nx+1}{n-2}\right)\right)+\omega\left(\left|\frac{2x+1}{n-2}\right|\right), x>0, n>3.$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Phillips R.S. An inversion formula for Laplase transforms and semi-groups of linear operators, Ann.of Math., 59, (1954), 325-356.
2. Durrmeier J.L. Une formule d'inversion, de la transformee de Laplace: Application a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, 1967.
3. Gupta V., Vasishtha V, Gupta M.K. Rate of convergence of summation-integral type operators with derivatives of bounded variation, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 4, Issue 2, Article 34, 2003.
4. Naokant Deo. Direct Result on the Durrmeyer Variant of Beta Operators, Sousheast Asian Bulletin of Mathematics, 32, (2008), 283-290.
5. Волков Ю.І. Додатні оператори. Наближення. Імовірність. Київ: НМК ВО, 1992.- 200с.
6. Волков Ю.І. Розподіли степеневих рядів із заданими коваріаціями. Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету, Серія: фізико-математичні науки, Випуск 43, 2002 р., с. 16-21.

УДК 532.59

НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Ю.В.ГУРТОВИЙ

В статті зроблений огляд виникнення та дослідження нелінійного рівняння Шредінгера(НРШ). Подано точні розв'язки НРШ з різними типами нелінійності

The overview of genesis and research of nonlinear Schrödinger equation is done. The exact solutions of nonlinear Schrödinger equation with different type nonlinearity are given.

Історичний огляд. В 60-х роках в численних дослідженнях з'являється НРШ, яке досить добре описує еволюцію слабконелінійних хвильових пакетів в середовищі з дисперсією. Це фундаментальне рівняння нелінійної фізики з'явилось в різних областях науки. Вперше воно виникло в 1961 році в теорії конденсованих середовищ, коли Л.П.Пітаєвський [1] і Є.Гросс незалежно один від одного отримали його для описання процесу вихрових ниток в конденсаті Бозе-Ейнштейна. Проникнення НРШ в нелінійну теорію хвиль розпочалось з робіт П.Келлі і В.І.Таланова в 1965 році при розгляді задачі про самофокусування хвильових пучків [2]. Для описання нестаціонарних хвильових полів в диспергуючих середовищах воно було практично одночасно застосоване А.Г.Літваком, В.І.Талановим для нелінійних електромагнітних хвиль в діелектриці в 1967 році [3] і В.І.Карпманом [4-5] для описання модульованих хвиль, а В.Є.Захаровим при дослідженні стійкості поверхневих хвиль. В найбільш загальному виді НРШ було запропоноване Д. Бенні і А.Ньюеллом [6] як формалізоване модельне рівняння, яке придатне для описання слабонелінійних диспергуючих хвиль різної природи. В 1970 році НРШ з'явилось в роботі Ф.Тапперта і К.Вармі в зв'язку з вивченням поширення теплового імпульса в твердому тілі, а в 1972 році воно проникло в фізику плазми, для описання нелінійних ленгмюровських хвиль. Однак відомим воно стало в 1971 році після роботи В.Є. Захарова і А.Н. Шабата [7], в якій вони знайшли точний розв'язок НРШ за допомогою вдосконаленого ними метода оберненої задачі розсіювання. Вони показали, що якщо початкове збурення достатньо швидко затухає при зростанні просторової координати в нескінченність, то задача Коші для даного рівняня з початковою умовою може бути точно розв'язана. При цьому початковий хвильовий пакет з довільною формою обвідної розпадається на солітони обвідної і осцилюючий хвіст. Число і структура солітонів обвідної повністю визначаються початковими умовами. Осцилюючий хвіст досить малий по амплітуді, і звичайно містить дуже мало енергії в порівнянні з солітоними компонентами і лінійно розпливається з часом.

Метод багатомасштабних розвинень був успішно використаний Г.Хасімото та Г.Оно [8] для отримання НРШ, яке описує еволюцію гравітаційних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні рідкого шару.

Як відомо, Д. Стокс знайшов наближений вираз для нелінійних одновимірних гравітаційних хвиль на поверхні глибокої води, і висловив припущення, що із збільшенням амплітуди профіль хвиль наближається до деякої граничної форми з кутовою точкою при вершині. Крім того Стокс одержав два фундаментальних результати, зміст яких в тому, що в нелінійних середовищах з дисперсією можуть існувати стаціонарні хвилі, і що в дисперсійне співвідношення для нелінійної періодичної хвилі входить амплітуда.

Класична задача Стокса знову привернула до себе увагу в 1967 році, коли Бенджамін і Фейр показали теоретично і експериментально, що періодична слабонелінійна хвиля на глибокій воді нестійка по відношенню до малих модулюючих збурень [9]. Ними було знайдено критичне відношення глибини води до довжини хвилі при якому здійснюється нестійкість. Цей результат був несподіваним для механіків і математиків, що втратили багато років і зусиль на доведення існування і стійкості хвиль Стокса.

Великий внесок в теорію нелінійного рівняння Шредінгера і модуляційної нестійкості зробили роботи Г. Юена і В.Лейка (1975-1982 рр.) [10] по нелінійній динаміці гравітаційних хвиль на глибокій воді. Вони експериментально довели існування солітонів обвідної і їх стійкість при взаємодії з іншими хвильовими пакетами, ще раз показали нестійкість періодичної хвилі до модулюючих збурень. Основний їх результат в тому, що вони знайшли цікаву властивість розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера – явище повернення при довгочасовій еволюції нестійкого розв'язку. Чисельний розвязок нелінійного рівняння Шредінгера з періодичними граничними і з нестійкими початковими умовами (тобто коли хвилепродуктор діє неперервно) показує, що в нестійкій хвильовій системі глибина модуляції збільшується і досягає максимуму. Потім вона зменшується і розв'язок поступово повертається до немодульованого стану. Такий процес повторюються в часі і це було підтверджено експериментально. Таке періодичне повернення до майже не модульованого початкового стану одержав назву повернення ФПУ, оскільки вперше його відкрили Фермі, Паста і Улам при чисельному моделюванні ангармонічних решіток атомів [11].

А.Найфе [12] використовував метод багатомасштабних розвинень для виведення пари диференційних рівнянь у частинних похідних, які описують еволюцію хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту двох напівнескінченних рідин з різними густинами. В результаті було отримано два альтернативні нелінійні рівняння Шредінгера та досліджено стійкість хвильових пакетів кінцевої амплітуди.

Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого двох рідких шарів над ним вивчалась Селезовим, Авраменко та Гуртовим [13-14]. В наступних публікаціях цими авторами досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів в системі "шар - шар" методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [15].

НРШ та його точні розв'язки. НРШ, яке відноситься до рівнянь параболічного типу з однією просторовою змінною має вигляд

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+k\left|q\right|^2 q=0,$$

де q – комплексна функція дійсних змінних x і t, k – дійсне число, $i^2=-1$.

В процесі дослідження були знайдені такі його точні розв'язки [16-17]

$$q(x,t)=C_1\exp\left\{i\left[C_2x+(kC_1^2-C_2^2)t+C_3\right]\right\},$$

$$q(x,t)=\pm C_1\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\exp\left[i(C_1^2t+C_2)\right]}{\operatorname{ch}(C_1x+C_3)},$$

$$q(x,t)=\pm A\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\exp\left[iBx+i(A^2-B^2)t+iC_1\right]}{\operatorname{ch}(Ax-2ABt+C_2)},$$

$$q(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{\left(x+C_2\right)^2}{4t}+i\left(kC_1^2\ln t+C_3\right)\right],$$

де $A,\ B, C_1, C_2, C_3$ - довільні дійсні константи. Другий і третій розв'язок справедливі лише при k>0, тобто при модуляційній нестійкості. Фізичний зміст першого та третього розв'язку був проаналізований нами для випадку двошарової гідродинамічної системи [18].

Спорідненими до вищевказаного рівняння є НРШ з кубічною не лінійністю

1) $i\dfrac{\partial q}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}+(A|q|^2+B)q=0$,

Воно має точні розв'язки

$$q(x,t)=C_1\exp\left\{i\left[C_2x+(AC_1^2+B-C_2^2)t+C_3\right]\right\},$$

$$q(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{\left(x+C_2\right)^2}{4t}+i\left(AC_1^2\ln t+Bt+C_3\right)\right],$$

де $A,\ B, C_1, C_2, C_3$ - довільні дійсні константи

2) $i\dfrac{\partial q}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}+(A|q|^2+Bq+C)q=0$

Його точний розв'язок

$$q(x,t)=(ax+b)\exp\left[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\right],$$

Де $a(t),\ b(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ - дійсні функції дійсної змінної.

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+A|q|^{2n}q=0$$

Його точні розв'язки

$$q(x,t)=C_1\exp\left\{i\left[C_2x+(A|C_1|^{2n}-C_2^2)t+C_3\right]\right\},$$

$$q(x,t)=\pm\left[\frac{(n+1)C_1^2}{A\,\mathrm{ch}^2(C_1nx+C_2)}\right]^{\frac{1}{2n}}\exp\left[i(C_1^2t+C_3)\right],$$

$$q(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{\left(x+C_2\right)^2}{4t}+i\left(\frac{AC_1^{2n}}{1-n}t^{1-n}+C_3\right)\right],$$

Відмітимо, що можна привести ще декілька більш загальних рівнянь. Але приведеного вище достатньо для розуміння значення НРШ та характеру його точних розв'язків, які часто описують солітони обвідних.

Висновок. Таким чином, НРШ займають фундаментальне місце в теорії нелінійних процесів, і описують велике різномаїття фізичних процесів. Разом з тим не всі одержані точні розв'язки НРШ мають фізичну інтерпретацію. Всебічний аналіз їх призведе до знаходження нових властивостей і фізичних ефектів нелінійних систем.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Питаевский Л.П. Вихревые нити в идеальном Бозе-газе // ЖЭТФ.- 1961.- Т. 40б вып. 2.- С. 646-651.

2. Таланов В.И. О самофокусирующихся волновых пучках в нелинейной среде // Письма в ЖЭТФ. - 1965.- Т. 2, № 5.- С. 218-222.

3. Литвак А.Г., Таланов В.И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах // Изв.ВУЗов. Радиофизика. – 1967. – Т. 10, №4. – С. 539.

4. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973.

5. Карпман В.И., Крушкаль Е.М. Модулированные волны в нелинейных диспергирующих средах//ЖЭТФ.- 1968. - Т. 55, вып. 2.- С. 530.

6. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.- М.: Мир, 1989.-324с.

7. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.- 1971.- Т.61, вып. 1.- С. 118-134.

8. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves //J. of the Phys. Soc. of Japen.- 1972.- 33.- P. 805-811.

9. Нелинейная теория распостранения волн / Пер с англ. под ред. Г.И. Баренблатта, - М.: Мир, 1970.

10. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train // J. Fluid Mech.- 1977.-vol.83, part 1.- P.49-74.

11. Ферми Э. Научные труды. Т II. – М.:Наука, 1972.

12. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.- 1976.- 43**,** N4.- P. 584-588.

13. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе "слой-полупространство" с учетом поверхностного натяжения // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2001.- 44, N2.- С. 113-122.

14. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распостранения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Том 7(79), № 1. - С. 80-89.

15. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе //Прикладна гідромеханіка. - 2006, - 8(90), №4. - С. 60-65.

16. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solutions nonlinear wave equations.- Academic Press, Inc., 1982.

17. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.

18. Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В., Селезов И.Т, Характерные свойства распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикладная гидромеханика. – 2009. – **11**, № 4. – С. 3-8.