УДК 532.59

ТРЕТЄ НАБЛИЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ВНУТРІШНІХ СТОХАСТИЧНИХ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ «ПІВПРОСТІР-ПІВПРОСТІР»

О.В. АВРАМЕНКО, Г.Р.РІЖНЯК

Виведено третє наближення основного динамічного рівняння для випадкових внутрішніх хвиль на поверхні контакту двох рідких півпросторів.

The third approximation of the main dynamic equation for random internal waves on the interface of two fluid half-spaces is obtained.

Вступ. На сучасному етапі вивчення випадкових хвильових процесів все ширше починають застосовуватися придатні до практичного застосування кількісні співвідношення. Вони допомагають з’ясувати зв’язки між умовами виникнення хвиль та самими хвилями. Ці кількісні співвідношення можуть бути отримані шляхом аналізу та узагальнення лабораторних і натурних вимірювань. Саме тому необхідними є аналітичні розв’язки, які дають змогу тестувати наближені та чисельні методи.

Велика кількість науковців досліджували проблему вивчення випадкових хвиль у гідродинамічному середовищі. Варто згадати працю, у якій викладаються основи статистичної гідромеханіки [3], проблема випадкових поверхневих хвиль досліджується у руслі сучасного її бачення у книзі [4]. Цікавими також є деякі статті, що стосуються проблеми стохастичного поля поверхневих хвиль на воді або вітрових хвиль [8], [9], [11]. У статтях [5] і [10] представлено дослідження стійкості та особливості хвильового руху у двошарових системах вигляду "півпростір - півпростір", "шар - півпростір" методом багатомасштабних розвинень. Також необхідно назвати роботи, присвячені проблемі випадкових внутрішніх хвиль [6], [7]. Друге наближення основного динамічного рівняння для випадкових внутрішніх хвиль на поверхні контакту двох рідких півпросторів отримано у статті [1].

Метою даної роботи є отримання третього наближення динамічного рівняння для амплітуд випадкових хвиль на поверхні контакту двох півпросторів у рамках слабконелінійної поверхні.

1. Постановка задачі та метод розв’язання. Розглядається хвильовий рух у гідродинамічній системі «півпростір-півпростір» у рамках слабконелінійної моделі. Досліджується поле випадкових хвиль на поверхні контакту $z=\eta(x,t)$ двох рідких півпросторів

$\Omega_1=\left\{(x,y,z);|x|,|y|<\infty, z<0\right\}$ та $\Omega_2=\left\{(x,y,z);|x|,|y|<\infty, z>0\right\}$

з різними густинами ρ_1 та ρ_2. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z-напрямку. При цьому поля швидкостей у півпросторах $\boldsymbol{u}^{(1)}$ та $\boldsymbol{u}^{(2)}$ представлено у вигляді градієнтів скалярних потенціалів φ

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \nabla\varphi^{(1)} \text{ в } \Omega_1 \text{ та } \boldsymbol{u}^{(2)} = \nabla\varphi^{(2)} \text{ в } \Omega_2 .$$

Математична постановка задачі має вигляд:
рівняння руху

$$\Delta\varphi^{(1)} = 0 \text{ в } \Omega_1 \text{ і } \Delta\varphi^{(2)} = 0 \text{ в } \Omega_2 , \tag{1}$$

кінематичні умови на поверхні контакту $z = \eta$

$$\eta_t + \alpha\left(\nabla_2\eta\nabla_2\varphi^{(1)}\right) = \varphi_z{}^{(1)} \Big|_{z=\eta\alpha}, \tag{2}$$

$$\eta_t + \alpha\left(\nabla_2\eta\nabla_2\varphi^{(2)}\right) = \varphi_z{}^{(2)} \Big|_{z=\eta\alpha}, \tag{3}$$

динамічна умова на поверхні контакту $z = \eta$

$$\varphi_t{}^{(1)} - \rho\varphi_t{}^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha(\nabla_3\varphi^{(1)})^2 - \frac{1}{2}\rho\alpha(\nabla_3\varphi^{(2)})^2 = -(1-\rho)\eta \Big|_{z=\eta\alpha}, \tag{4}$$

умови затухання

$$\varphi^{(1)} \to 0 \text{ при } z \to -\infty \text{ та } \varphi^{(2)} \to 0 \text{ при } z \to +\infty . \tag{5}$$

Відомо, що відповідна до (1)-(5) лінеаризована задача має розв'язки [2]

$$\varphi^{(1)}\left(\boldsymbol{x}, z, t\right) = A^{(1)}(z)e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} \text{ та } \varphi^{(2)}\left(\boldsymbol{x}, z, t\right) = A^{(2)}(z)e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)}, \tag{6}$$

$$A^{(1)}\left(z\right) = -\frac{i\omega b}{k}e^{k_z z},$$

$$A^{(2)}\left(z\right) = \frac{i\omega b}{k}e^{-k_z z}, \tag{7}$$

$$\eta\left(\boldsymbol{x}, t\right) = b\operatorname{Re} e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)},$$

тут b - амплітуда поверхні контакту, $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ - горизонтальний хвильовий вектор, k_z - вертикальне хвильове число, ω - кругова частота, $A^{(1)}(z)$ та $A^{(2)}(z)$ – параметри вертикальної складової хвильового руху, $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ - відношення густин.

Безрозмірні величини введені з допомогою характерної довжини L, характерного часу $(L/g)^{\frac{1}{2}}$, густини нижньої рідини ρ_1, g - прискорення вільного падіння.

Для виведення динамічного рівняння для слабконелінійних внутрішніх хвиль на поверхні контакту двох різних півпросторів застосуємо метод послідовних наближень.

Спираючись на вигляд (6) розв'язків лінеаризованої задачі, побудуємо розвинення всіх випадкових полів у інтеграли Фур'є-Стілтьєса у вигляді

$$\eta\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \int e^{i\chi} B_q d\boldsymbol{q} ,$$

$$\varphi^{(1)}\left(\boldsymbol{x}, z, t\right) = \int e^{i\chi + kz} A_q{}^{(1)} d\boldsymbol{q} , \tag{8}$$

$$\varphi^{(2)}\left(\boldsymbol{x},z,t\right)=\int e^{i\chi-kz}A_q^{(2)}d\boldsymbol{q}\,,$$

де $\chi=\boldsymbol{kx}-\omega t$ - фазова змінна; $\boldsymbol{x}=(x,y)$; $k=|\boldsymbol{k}|$ - модуль хвильового вектора або хвильове число; $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{k},\omega)$ - узагальнена фазова змінна Фур’є розвинення, для диференціалу якої прийнято позначення $\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\omega$. Величини $A_q\equiv A(\boldsymbol{q})$, $B_q\equiv B(\boldsymbol{q})$ та $C_q\equiv C(\boldsymbol{q})$ - стохастичні амплітуди відповідних полів. Тут і далі інтеграли беруться по нескінченному проміжку інтегрування по кожній зі змінних, диференціал якої записаний під інтегралом. Це стосується і кратних інтегралів. Тому для простоти запису області інтегрування у формулах будуть опускатися.

2. Система рівнянь відносно стохастичних амплітуд до $\boldsymbol{\alpha}^3$. Підставивши формули (8) у кінематичні умови (2)-(3) та у динамічну крайову умову (4), отримаємо

$$\int -i\omega_1 e^{i\chi_1}B_{q_1}d\boldsymbol{q}_1-\alpha\iint \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}e^{i\chi_1+i\chi_2\pm\alpha k_1\eta}d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2=$$

$$=\pm\int k_1 e^{i\chi_1\pm\alpha k_1\eta}A_{q_1}^{\binom{1}{2}}d\boldsymbol{q}_1\,. \qquad (9)$$

$$\int -i\omega e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)+\alpha k\eta}A_q^{(1)}d\boldsymbol{q}-\rho\int -i\omega e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)-\alpha k\eta}A_q^{(2)}d\boldsymbol{q}+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\iint\left(-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2+k_1k_2\right)A_{q_1}^{(1)}A_{q_2}^{(1)}e^{i\left[(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}-\omega_1 t)+(\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{x}-\omega_2 t)\right]+(k_1+k_2)\alpha\eta}d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-\frac{\rho}{2}\alpha\iint\left(-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2+k_1k_2\right)A_{q_1}^{(2)}A_{q_2}^{(2)}e^{i\left[(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}-\omega_1 t)+(\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{x}-\omega_2 t)\right]-(k_1+k_2)\alpha\eta}d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2=$$

$$=-\left(1-\rho\right)\int e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)}B_q d\boldsymbol{q}\,. \qquad (10)$$

Розвинення експонент вигляду $e^{\pm\alpha k\eta}$ в околі незбуреної поверхні контакту має вигляд

$$e^{\alpha k\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha k\eta)^n}{n!}=1+\alpha k\int e^{i(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}-\omega_1 t)}B_{q_1}d\boldsymbol{q}_1+$$

$$+\frac{(\alpha k)^2}{2}\iint e^{i(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}-\omega_1 t)+i(\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{x}-\omega_2 t)}B_{q_1}B_{q_2}d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2+\ldots. \qquad (11)$$

Після підстановки (11) в (9) і (10) отримаємо співвідношення, які помножимо скалярно на $e^{i\chi}$

$$\int -i\omega_1 B_{q_1}\delta(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1-\alpha\iint \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2\mp$$

$$\mp\alpha^2\iiint \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 k_1 A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}B_{q_3}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2 d\boldsymbol{q}_3\mp O(\alpha^3)=$$

$$=\pm\int k_1 A_{q_1}^{\binom{1}{2}}\delta\left(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1\pm\alpha\iint k_1^2 A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}\delta\left(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+\alpha^2\iiint\frac{k_1^{\,3}}{2}A_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2d\boldsymbol{q}_3+O(\alpha^3)\,. \qquad (12)$$

$$-\int i\omega A_{q_1}^{\;(1)}\delta(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1-\alpha\iint i\omega_1k_1A_{q_1}^{\;(1)}B_{q_2}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\iiint i\omega_1k_1^2A_{q_1}^{\;(1)}B_{q_2}B_{q_3}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2d\boldsymbol{q}_3+O\left(\alpha^3\right)+$$

$$+\rho\int i\omega A_{q_1}^{\;(2)}\delta\left(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1-\rho\iint i\omega_1k_1A_{q_1}^{\;(2)}B_{q_2}\delta\left(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-\rho\frac{\alpha^2}{2}\iiint i\omega_1k_1^2A_{q_1}^{\;(2)}B_{q_2}B_{q_3}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2d\boldsymbol{q}_3+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\iint\left(-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2+k_1k_2\right)A_{q_1}^{\;(1)}A_{q_2}^{\;(1)}\delta\left(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\iiint\left(-k_1k_2+k_1k_2\right)\left(k_1+k_2\right)A_{q_1}^{\;(1)}A_{q_2}^{\;(2)}B_{q_3}\delta\left(q_1+q_2+q_3-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2d\boldsymbol{q}_3-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\rho\iint\left(-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2+k_1k_2\right)A_{q_1}^{\;(2)}A_{q_2}^{\;(2)}\delta\left(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-\rho\frac{\alpha^2}{2}\iiint(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2-k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}^{\;(1)}A_{q_2}^{\;(2)}B_{q_3}\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2d\boldsymbol{q}_3+$$

$$+O\left(\alpha^3\right)=-\left(1-\rho\right)\int B_{q_1}\delta\left(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}, \qquad (13)$$

при цьому враховано ортогональність базисних функцій, а також зв'язок скалярного добутку та δ-функції Дірака $\int e^{i\chi}e^{-i\chi_1}d\boldsymbol{q}=C\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1)$, тут C – довільна стала.

Перетворимо співвідношення (12) та (13), скориставшись властивістю функції Дірака $\int\delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right)f\left(\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{a})$

$$\pm kA_q^{\binom{1}{2}}+i\omega B_q= \qquad (14)$$

$$=-\alpha\frac{1}{2}\int\boldsymbol{k}_1\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right)A_{q-q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_1}d\boldsymbol{q}_1\mp\alpha^2\iint\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2k_1A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\int\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|^2A_{q-q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_1}d\boldsymbol{q}_1-\alpha^2\iint\frac{k_1^{\,3}}{2}A_{q_1}^{\binom{1}{2}}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+O\left(\alpha^3\right)$$

$$-i\omega\left(A_q^{\;(1)}-\rho A_q^{\;(2)}\right)+\left(1-\rho\right)B_q=\alpha\int i\omega_1k_1A_{q_1}^{\;(1)}B_{q-q_1}d\boldsymbol{q}_1+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\iint i\omega_1k_1^2A_{q_1}^{\;(1)}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+\rho\alpha\int i\omega_1k_1A_{q_1}^{\;(2)}B_{q-q_1}d\boldsymbol{q}_1+$$

$$+\rho\frac{\alpha^2}{2}\iint i\omega_1k_1^2A_{q_1}^{\;(2)}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int(\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)-k_1\,|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\,|)A_{q_1}{}^{(1)}A_{q-q_1}{}^{(1)}d\boldsymbol{q}_1+ \qquad (15)$$

$$+\frac{1}{2}\iint(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2-k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}{}^{(1)}A_{q_2}{}^{(1)}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+\rho\frac{\alpha}{2}\int(\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)-k_1\,|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\,|)A_{q_1}{}^{(2)}A_{q-q_1}{}^{(2)}d\boldsymbol{q}_1+$$

$$+\rho\frac{1}{2}\iint\left(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2-k_1k_2\right)\left(k_1+k_2\right)A_{q_1}{}^{(2)}A_{q_2}{}^{(2)}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+O\left(\alpha^3\right).$$

Отже, отримано третє наближення кінематичних умов у вигляді (14) та динамічної умови (15).

3. Третє наближення динамічного рівняння для стохастичних внутрішніх слабконелінійних хвиль. Для пошуку амплітуд випадкових хвиль скористаємося методом послідовних наближень. Із першого наближення кінематичних умов отримаємо

$$A_1^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})=\mp\frac{i\omega}{k}B_q. \qquad (16)$$

Друге наближення отримаємо підстановкою першого наближення у (14), де враховано члени до α

$$A_2^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})=\int\frac{i(\omega-\omega_1)}{k\,|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\,|}[|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\,|^2+\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)]B_{q_1}B_{q-q_1}d\boldsymbol{q}_1. \qquad (17)$$

Аналогічно третє наближення

$$A_3^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})=\pm\iint\frac{i\omega_1}{kk_1}[\frac{(k_1)^3}{2}\pm\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2k_1]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2\mp$$

$$\mp\iint\frac{i(\omega-\omega_1-\omega_2)}{k\,|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\,||\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\,|}[|\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\,|^2+\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)]\cdot$$

$$\cdot[\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)+\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|^2]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2\,. \qquad (18)$$

Повний вираз стохастичних амплітуд матиме вигляд

$$A^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})=A_1^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})+\alpha A_2^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})+\alpha^2A_3^{\binom{1}{2}}(\mathbf{q})+O\left(\alpha^3\right)\,. \qquad (19)$$

Після підстановки виразу (19) у динамічну умову (15) та після виконання громіздких перетворень отримаємо $[\left(1-\rho\right)-\frac{\omega^2}{\mathrm{k}}\left(1+\rho\right)]B_q=$

$$=-(1-\rho)\alpha^2\iint\frac{\omega\omega_1}{kk_1}\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2k_1B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-(1+\rho)\alpha^2\iint\frac{\omega\omega_1}{kk_1}\frac{k_1^{\,3}}{2}B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$+(1+\rho)\alpha^2\iint\frac{\omega(\omega-\omega_1-\omega_2)}{k\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}[|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|^2+\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)]\cdot$$

$$\cdot[\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)+\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|^2]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-(1+\rho)\alpha^2\iint\frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_1}{k_1}[k_1^2+\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+(1-\rho)\frac{\alpha^2}{2}\iint\omega_1^2k_1B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+ \tag{20}$$

$$+(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\iint\frac{\omega_1(\omega-\omega_1-\omega_2)}{k_1\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}[|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|^2+\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)]\cdot$$

$$\cdot[\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)-k_1\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+$$

$$+(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\iint\frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)\omega_1}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|\,k_1\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)-|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2||\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|]\cdot$$

$$\cdot[k_1^2+\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2]B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2-$$

$$-(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\iint\frac{\omega_1\omega_2}{k_1k_2}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2-k_1k_2)(k_1+k_2)B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+O\left(\alpha^3\right).$$

Зведемо усі доданки співвідношення (20) до симетричного вигляду та отримаємо остаточний вигляд основного динамічного рівняння

$$[(1-\rho)-\frac{\omega^2}{k}(1+\rho)]B_q= \tag{21}$$

$$=\int f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1)B_{q_1}B_{q-q_1}d\boldsymbol{q}_1+\iint f_4(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\boldsymbol{q}_1d\boldsymbol{q}_2+O\left(\alpha^3\right),$$

де

$$f_4(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)=-(1-\rho)\frac{\alpha^2}{2}\omega[\omega_1+\omega_2]\frac{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{k}-(1+\rho)\frac{\alpha^2}{4}\frac{\omega}{k}[\omega_1k_1^2+\omega_2k_2^2]-$$

$$+(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\frac{\omega(\omega-\omega_1-\omega_2)}{k\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}[|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|^2+(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)]\cdot$$

$$\cdot[\frac{\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|}+\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right|+\frac{\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)}{\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2\right|}+\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2\right|]+$$

$$-(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}[\frac{\omega_1^2\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}+\frac{\omega_1\omega_2\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}+\frac{\omega_1\omega_2\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}+\frac{\omega_1^2\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}]$$

$$+(1-\rho)\frac{\alpha^2}{4}[\omega_1^2k_1+\omega_2^2k_2]+$$

$$+(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\{(\omega-\omega_1-\omega_2)\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|\,[\omega_1<\boldsymbol{k}_1;\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1>+$$

$$+\omega_2<\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2>-$$

$$-(\omega_1+\omega_2)]+\frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}[\boldsymbol{k}_2<\boldsymbol{k}_1;\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1>+$$

$$+\boldsymbol{k}_1<\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2>-(\omega_1+\omega_2)]\}+$$

$$+(1+\rho)\frac{\alpha^2}{4}((\omega-\omega_1-\omega_2)<\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2>[\omega_1 k_1+\omega_2 k_2+\frac{\omega_1\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{k_1}+$$

$$+\frac{\omega_2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{k_2}]+(\omega-\omega_1-\omega_2)[-\omega_1 k_1-\omega_2 k_2-\frac{\omega_1\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{k_1}-\frac{\omega_2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{k_2}])-$$

$$-(1+\rho)\frac{\alpha^2}{2}\frac{\omega_1\omega_2}{k_1k_2}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2-k_1k_2)(k_1+k_2)\,.$$

Розглянемо випадок відсутності верхньої рідини, тобто відношення густини прямує до нуля $\rho\to 0$. Тоді отримане динамічне рівняння (21) для гідродинамічної системи «півпростір-півпростір» перетвориться у відповідне динамічне рівняння для півпростору, яке отримано раніше [8].

Висновки. У статті отримане третє наближення основного динамічного рівняння для стохастичних амплітуд, для цього застосовано метод послідовних наближень. Достовірність отриманих результатів підтверджена граничним випадком отриманого динамічного рівняння.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В. Зв'язок між стохастичними амплітудами полів слабко нелінійних внутрішніх хвиль у рідкій системі «півпростір-півпростір».- Наукові записки КДПУ. Серія: Математичні науки. Випуск 68., Кіровоград: РВВ КДПУ 2006.- С.3-8.
2. Бреховських Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. – 344 с.
3. Монин А.С., Яглом А.Я. Статистическая гидромеханика. Ч.1.- Москва: Наука, 1967.- 630 с.
4. Полников В.Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде.- Москва: ЛЕНАНД, 2007.- 408 с.
5. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы.- 2001.- Вып. 17.- С.58-67.
6. Chen Xiao-Gang, Song Jin-Bao Second-order random wave solutions for interfacial internal waves in N-layer density-stratified fluid // Chinese Phys., 15.- 2006.- 756-766.
7. Chi-Min Liu Parametric Study on Random Internal Waves in a Two-Fluid System // Underwater Technology and Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies, 2007. Symposium on.- Pp. 83-86.
8. Longuet-Higgins M.S. The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves // Journal of Fluid Mechanics.- Vol. 17, N 3.- 1963.- Pp. 459-480.
9. Masuda A., Kuo Y., Mitsuyasu H. On the dispersion relation of random gravity waves. Pt.1 // J.Fluid Mechanics.- 1979.- 92, N 4.- Pp.717-730.
10. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.- 1976.- 43, N4.- P. 584-588.
11. Srokosz, M. A. On the joint distribution of elevation and slopes for a nonlinear random sear, with an application to radar altimetry.- J. Geophys. Res., 91(C1).- 1986.- Pp.995–1006.