[3] Бородин А.И., Бугай А.С. (1987) В*ыдающиеся математики: Биогр. слов. - справ.* 2-е изд., пер. и доп. – К.: Рад. шк.

[4] Кужель О.В. (1974) *Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа.* – Київ: Вища школа.

[5] Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. (2006) *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9* (Самоучитель). – М.: НТ Пресс.

[6] Филер З.Е. (2010) Неравенства в различных полях// *Наукові записки.- Вип. 69.- Серія: Математичні науки.* – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. Винниченка. – С. 108–113.

УДК 519.1751

ПОБУДОВА ІЗОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ 4-РЕГУЛЯРНИХ ГАМІЛЬТОНОВО РОЗКЛАДНИХ ГРАФІВ

К. М. ШЕВЧЕНКО

Из гамильтоново разложимых $2k$-регулярных графов строятся $2k$-регулярные графы более высоких порядков таким образом, что решается проблема изоморфизма графов в некоторых множествах путем редукции.

The $2k$-regular graphs of superior order are built out of Hamiltonian decomposable $2k$-regular graphs in such a way that the problem of the isomorphism of graphs in some sets is solved by reduction.

Гамільтонові розклади графа є його мінімальними C-розкладами. В [1] зроблено огляд результатів щодо існування гамільтонових розкладів різних добутків а також реберних графів гамільтоново розкладних графів.

Основну термінологію і позначення взято з [1]. Тут терміни «група графа» і «розклад» вживаються в розумінні «група всіх автоморфізмів графа» (група підстановок) і «гамільтонів розклад графа», відповідно.

Означення 1. Позначимо через $\theta(H,F)$ граф, отриманий в результаті підрозбиття [2] кожного ребра u_l деякої паросполуки F графа H порядку v новою вершиною b_l і наступного топологічного склеювання всіх нових вершин b_l в одну вершину a_{v+1} [3].

Лема 1. Для будь-якого $k \in N$ в кожному $2k$-регулярному графі порядку $v \geq 4k-1$ існує паросполука F розміру k.

Доведення. $2k+1$ – найменший порядок $2k$-регулярного графа. Кожний $2k$-регулярний граф H порядку $2k+s$ має $k(2k+s)$ ребер. Кожне його ребро u суміжне з $2(2k-1)$ ребрами (вони утворюють подвійну зірку з центральним ребром u), жодне з яких не може входити в одну паросполуку F з u. Якщо навіть припустити, що множини ребер подвійних зірок з центральними ребрами з паросполуки F не перетинаються (а це взагалі кажучи не так, тобто, в наступній різниці замість від'ємника $2k(2k-1)$ менше число), паросполука F розміру k в H існує, якщо різниця $k(2k+s)–2k(2k–1)–k=k(s–2k+1)\geq 0$, а це буде при $s \geq 2k-1$. Отже, в кожному $2k$-регулярному графі порядку $v \geq 4k-1$ існує паросполука розміру k.

Зауваження 1. Паросполуки розміру k існують і в багатьох $2k$-регулярних графах, порядки яких менші за $4k-1$.

Теорема 1. Якщо в $2k$-регулярному графі H існує паросполука F розміру k, то граф $\theta(H,F)$ існує і теж є $2k$-регулярним.

Доведення. В результаті підрозбиття кожне з k ребер паросполуки F перетворюється в два ребра. В результаті топологічного склеювання k нових вершин степеня 2 інцидентні їм ребра не склеюються і не утворюються кратні ребра, бо в F немає суміжних ребер. Тому вершина a_{v+1} має степінь $2k$, а степені всіх інших вершин такі ж, як і в графі H, тобто, також $2k$.

Лема 2. Для кожного гамільтонового розкладу $2k$-регулярного графа H порядку $v \geq 4k-1$ (якщо такий розклад існує) знайдеться паросполука F розміру k, в яку входить по одному ребру з кожної компоненти розкладу графа H, $k \in N$.

Доведення. База індукції. При $k=1$ $H=C_v$. F має розмір 1. Це тривіальний випадок. При $k=2$ ребро u однієї компоненти розкладу суміжне з 4 ребрами другої компоненти, а оскільки $v \geq 7$, то в другій компоненті є не менше трьох ребер, несуміжних з *u*. Будь-яке з них разом з *u* складає паросполуку *F*, яка задовольняє умови леми.

Крок індукції. Припустимо, що для $k = s - 1$ лема правильна. При $k = s$ видалимо з H всі ребра будь-якої компоненти C_v розкладу. Залишиться $2(s-1)$- регулярний граф H', порядок якого $v \geq 4s - 1 > 4(s-1) - 1$, тому за припущенням індукції існує паросполука F' розміру $s - 1$, всі ребра якої належать різним компонентам гамільтонового розкладу графа H', а значить і графа *H*. Кожне з $s - 1$ ребер паросполуки F' суміжне з 4 ребрами циклу C_v (ці четвірки ребер можуть і перетинатися). Отже, не суміжними з жодним з ребер паросполуки F' залишилось *t* ребер компоненти C_v, $t \geq v - 4(s-1) \geq 4s - 1 - 4(s-1) = 3$, і будь-яке з цих ребер можна включити в *F*.

Теорема 2. Якщо $2k$-регулярний граф H порядку $v \geq 4k - 1$ гамільтоново розкладний, то існує граф $\theta(H, F)$, який також є гамільтоново розкладним.

Доведення. За лемою 2 для будь-якого гамільтонового розкладу графа *H* існує паросполука *F* розміру *k*, всі ребра якої належать до різних компонент цього розкладу. Побудова графа $\theta(H, F)$ починается з підрозбиття кожного ребра *u* з *F* новою вершиною b_l. Ребро *u* з компоненти C_v розкладу графа *H* перетворюється на два ребра цикла $C_{v+1} = \theta(C_v, F_0)$, де F_0 складається з одного ребра *u*. Всі вершини b_l належать до різних циклів C_v, і в результаті склеювання вершин b_l в a_v кожен цикл C_{v+1} залишається елементарним циклом. Всі C_{v+1} проходять через a_{v+1} в $\theta(H, F)$ і є гамільтоновими циклами графа $\theta(H, F)$, компонентами його гамільтонового розкладу. Кількість компонент така ж, як і в графі *H*, і номер кожної компоненти $C_{v+1} = \theta(C_v, F_0)$ такий же, як у компоненти C_v розкладу графа *H*.

Означення 2. Будемо говорити, що гамільтонів розклад $2k$-регулярного графа H_1 продовжується до гамільтонового розкладу графа H_s, якщо

$H_{t+1} = \theta(H_t, F_t)$, причому в F_t входить по одному ребру $u_{i,t}$ з кожної компоненти $C_{i,t}$ розкладу графа H_t, всі F_t мають розмір *k*, і якщо компонентами розкладу графа H_{t+1} є його гамільтонові цикли $C_{i,t+1} = \theta(C_{i,t}, F_{i,t})$, де $F_{i,t} = \{u_{i,t}\}$, $u_{i,t} \in F_t$, $i = 1,2,\ldots,k$; $t = 1,2,\ldots,s-1$, $s \geq 2$.

Наслідок 1. Для довільного 4-регулярного графа *H* існує 4-регулярний граф $\theta(H, F)$.

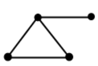
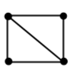
Справді, при $k = 2$ за лемою 1 в кожному 4-регулярному графі порядку $v \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7$ існує паросполука *F* розміру 2. Крім цих графів існує лише по одному 4-регулярному графу порядків 5 і 6: K_5 і T_6. В кожному з них легко знайти паросполуку *F* розміру 2. За теоремою 1 всі графи $\theta(H, F)$, де *F* має розмір 2, також 4-регулярні.

Наслідок 2. Для довільного гамільтоново розкладного 4-регулярного графа *H* порядку *v* існує гамільтоново розкладний граф $\theta(H, F)$, де *F* має розмір 2.

Справді, при $v \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7$ це наслідок теореми 2. А K_5 і T_6 гамільтоново розкладні. В них легко знайти паросполуки F_1 і F_2, кожна з яких складається з двох ребер, що належать різним компонентам розкладу, і побудувати графи $\theta(K_5, F_1)$ і $\theta(T_6, F_2)$.

Кожна паросполука розміру *k* графа *H* є 1-фактором деякого (не обов'язково породженого) підграфа порядку 2*k* графа *H*.

Означення 3. Назвемо θ-твірним графом граф *Q* порядку 2*k*, в якому існує такий 1-фактор *F*, що в $\theta(H, F)$ є підграф, ізоморфний *Q*.

Серед 11 графів порядку 4 шість мають 1-фактори; три з них: , ,  є θ-твірними.

Для зручності формулювань будемо називати θ-твірним підграфом графа H той його підграф, який ізоморфний θ-твірному графу, і з якого вибирається 1-фактор F для побудови графа $\theta(H,F)$.

Означення 4. Будемо позначати через $R_{2k,\theta}$ будь-яку підмножину множини R_{2k} [1], в якій кожен граф порядку $v+1$ є графом $\theta(H,F)$, де H – деякий граф порядку v з тієї ж підмножини, крім графів найменшого порядку з цієї підмножини.

Теорема 3. Кожен $2k$-регулярний граф H порядку $v \geq 4k-1$ належить до деякої нескінченної множини $R_{2k,\theta}$.

Ця теорема випливає з леми 1 і теореми 1.

Теорема 4. Кожен гамільтоново розкладний $2k$-регулярний граф H порядку $v \geq 4k-1$ належить до деякої нескінченної множини $R_{2k,\theta}$ гамільтоново розкладних графів.

Ця теорема випливає з леми 2 і теореми 2.

Опишемо побудову однієї з множин $R_{4,\theta}$ за допомогою θ-твірного графа K_4^- (граф, отриманий з K_4 видаленням одного ребра).

$H_1 = T_6$ – єдиний 4-регулярний граф порядку 6. F_1 може бути 1-фактором будь-якого ізоморфного K_4^- підграфа графа T_6. Виявляється, що всі графи $\theta(H_1,F_1)$ ізоморфні. В цьому розумінні будемо говорити, що граф $H_2 = \theta(H_1,F_1)$ єдиний. Доповнення графа H_2 до K_7 – елементарний цикл, отже, група графа H_2 транзитивна на множині $V(H_2)$. Кожна вершина графа H_2 разом зі своїм оточенням [2] породжує півколесо порядку 5.

1) F вибирається лише з півколеса порядку 5.

2) F – паросполука, одне ребро якої інцидентне вершинам степенів 2 і 3, а друге – вершинам степенів 3 і 4 в цьому півколесі.

Виберемо паросполуку F_2, яка задовольняє умови 1), 2). Граф $H_3 = \theta(H_2, F_2)$ існує і єдиний. В H_3 лише дві вершини є центрами півколіс порядку 5; існує автоморфізм графа H_3, який переставляє їх. Умови 1), 2) визначають єдиний граф $H_4 = \theta(H_3, F_3)$. В H_4 також лише дві вершини є центрами півколіс порядку 5; існує автоморфізм графа H_4, який переставляє їх. В H_4, як і в H_3, умови 1), 2) задовольняють дві паросполуки з одного півколеса порядку 5, але не існує автоморфізму графа H_4, який би відображав одну з них на другу. Зате в H_4 існує єдина вершина *a*, яка є центром голландського вітряка M_2. Два півколеса порядку 5 графа H_4 мають єдину спільну вершину *a*, на відміну від H_3, де вони мають дві спільні вершини. Враховуючи все це, умови 1), 2) доповнимо умовою

3) *F* – паросполука, одне з ребер якої інцидентне вершині *a*.

Граф $H_5 = \theta(H_4, F_4)$, де F_4 вибрано за умов 1), 2), 3), існує і єдиний.

Сформулюємо для *H* властивості, які мають H_4 і H_5.

i) В *H* існує єдина вершина *a*, яка є центром голландського вітряка M_2.

ii)В *H* є лише дві вершини, які є центрами півколіс порядку 5; їх оточення мають єдину спільну вершину *a*.

iii) Існує автоморфізм графа *H*, який переставляє центри півколіс порядку 5.

Лема 3. Якщо 4-регулярний граф H_t має властивості i), ii), iii), F_t, F_{t+1} вибрано за умов 1), 2), 3), a_i, a_j – центри півколіс порядку 5 графа H_t, $a_i \in V(F_t)$, $a_j \in V(F_{t+1})$, і якщо $H_{t+1} = \theta(H_t, F_t)$, $H_{t+2} = \theta(H_{t+1}, F_{t+1})$, $H'_{t+1} = \theta(H_t, F_{t+1})$, $H'_{t+2} = \theta(H'_{t+1}, F_t)$, то $H'_{t+2} = H_{t+2}$.

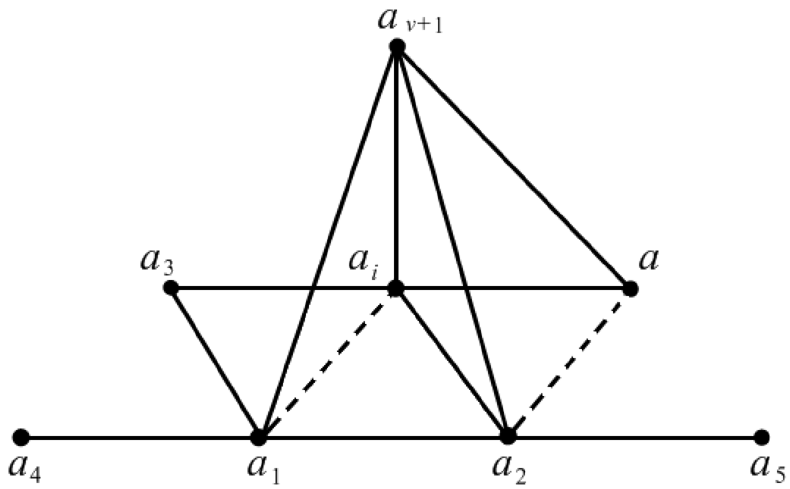


Рис. 1

Доведення. При побудові графа H_{t+1} з графа H_t видаляються ребра (a_i, a_1), (a, a_2), які належать півколесу порядку 5 з центром a_i і складають паросполуку F_t; натомість з'являється зірка $(a_{v+1})a_i a a_1 a_2$. При цьому в півколесі з центром a_j нічого не зміниться, бо воно має лише одну спільну вершину a з першим півколесом. Коли виконуються аналогічні дії над півколесом з центром a_j, тобто, будується H_{t+2} з H_{t+1}, то нічого не змінюється в підграфі, породженому множиною $\{a_i, a, a_1, a_2, a_3, a_{v+1}\}$. Звідси видно, що, коли змінити порядок дій, виконавши їх спочатку над півколесом з центром a_j, а потім над півколесом з центром a_i, тобто, побудувати $H'_{t+1} = \theta(H_t, F_{t+1})$, а потім $H'_{t+2} = \theta(H'_{t+1}, F_t)$, то $H'_{t+2} = H_{t+2}$.

Лема 4. Граф H_{t+2}, побудову якого описано в лемі 3, також має властивості i), ii), iii).

Доведення. На рис. 1 в H_t $(a a_i a_2)$ – крило голландського вітряка M_2 з центром a. З нього видаляється ребро (a, a_2); натомість з'являється крило $(a a_i a_{v+1})$ в H_{t+1}; воно є і в H_{t+2}. Крім того, в H_{t+2} зникає ребро другого крила вітряка M_2, але з'являється крило $(a a_j a_{v+2})$. Отже, a і в H_{t+2} є центром голландського вітряка M_2. Як видно на рис. 1, a_{v+1} в H_{t+1}, а значить, і в H_{t+2}, є центром півколеса порядку 5. Пам'ятаючи, що і всі інші вершини, зображені на рис. 1, мають степінь 4, як в H_t так і в H_{t+1}, бачимо, що a_i в H_{t+1}, а значить, і в H_{t+2}, вже не є центром півколеса порядку 5, бо в H_{t+1} множина $\{a_i, a_{v+1}, a, a_2\}$ породжує підграф K_4^-, a_3 не суміжна ні з a ні з a_2 (інакше a_i не була б центром півколеса порядку 5, яке є породженим підграфом в H_t). a_1 і a_2 мають степінь 4 як в H_t так і в H_{t+1}. Розглянемо вершину a_2. $\{a_2, a_1, a_{v+1}, a_i\}$ породжує K_4^- в H_{t+1}. a_5 не суміжна з a_i ні в H_t ні в H_{t+1}. Якщо припустити, що $a_4 = a_5$, тобто, a_5 суміжна з a_1, то в H_t a_1 була б центром півколеса порядку 5, що суперечить умові. Отже, і в H_{t+1} і в H_{t+2} a_2 не є центром півколеса порядку 5. Також ні a_i ні a_{v+1} ні a_2 не є центром голландського вітряка M_2, бо кожна з них разом з трьома вершинами з її оточення породжує K_4^-. Останньою вершиною, оточення якої змінилося при переході від H_t до H_{t+1}, є a_1. $\{a_1, a_2, a_{v+1}\}$ породжує C_3. a_3 не суміжна ні з a_{v+1} ні з a_2, як показано вище. Також $a_4 \neq a_5$, тобто a_4 не суміжна з a_2. $a_4 \neq a$, тобто, a_4 не суміжна з a_{v+1}. Тому і a_1 не є центром півколеса порядку 5 в H_{t+1}. a_1 також не є центром голландського вітряка M_2 в H_{t+1}, бо a_3 не суміжна з a_4 (інакше a_1 була б центром півколеса порядку 5 в H_t). Оточення вершини a_3 не змінюється, але з підграфа, породженого її оточенням, видаляється ребро (a_i, a_1) при побудові графа H_{t+1}. Якби при цьому утворилось півколесо порядку 5, породжене вершиною a_3 і її оточенням в H_{t+1}, то це означало б, що в H_t a_3 зі своїм оточенням породжує колесо порядку 5, серед вершин якого є a_i. a_i мала б бути суміжна в цьому колесі ще з однією вершиною крім a_3, a_1 в H_t. Всі вершини, суміжні з a_i в H_t, є на рис. 1. Вище вже було доведено, що a_3 не суміжна ні з a ні з a_2 в H_t. Отже, в

H_{t+1} a_3 також не буде центром півколеса порядку 5. Центром вітряка M_2 в H_{t+1} a_3 також не може бути, бо з'єднання ребром (a_i, a_1) двох несуміжних вершин вітряка M_2 перетворює M_2 в півколесо порядку 5, а в H_t a_3 не була центром такого півколеса за умовою.

Аналогічно доводиться, що центром другого півколеса порядку 5 в H_{t+2} є вершина a_{v+2} і жодна інша вершина. Вершина a залишається центром єдиного в H_{t+2} породженого підграфа, ізоморфного голландському вітряку M_2 (хоч і з іншою множиною вершин, ніж M_2 в H_t). Оскільки F і F' переставляє автоморфізм графа H_t, то цей автоморфізм продовжується до автоморфізму графа H_{t+2} приєднанням циклу (a_{v+1}, a_{v+2}). Лему доведено.

Теорема 5. Існує нескінченна множина $R_{4,\theta}$, яка являє собою послідовність (H_t), і в якій є по одному графу кожного порядку (з точністю до ізоморфізму), починаючи з T_6; кожен граф порядку $v \geq 9$ має властивості і), іі), ііі).

Доводиться теорема методом математичної індукції. База індукції – опис побудови графів H_t, $t \in \overline{1,5}$. Крок індукції – леми 3 і 4.

Теорема 6. Всі графи з (H_t) гамільтоново розкладні, причому існує такий гамільтонів розклад графа H_1, який продовжується до гамільтонового розкладу довільного графа з (H_t). Для будь-якого графа H_t порядку $v \geq 8$ існує автоморфізм, який переставляє центри a_i, a_j півколіс порядку 5 і зберігає цей розклад, причому компоненти розкладу графа парного порядку з (H_t) відображаються одна на другу, а в графі непарного порядку – кожна на себе.

Доведення. Граф $H_1 = T_6$ отримано з K_6 видаленням ребер $(1,5)$, (2,4), (3,6) (рис. 2). Шуканий гамільтонів розклад складається з циклів (1,3,5,4,6,2) і (1,4,3,2,5,6). Ребра (1,3) і (2,5) належать до різних компонент розкладу,

$F_1=\{(1,3),(2,5)\}$ і розклад графа H_1 продовжується до розкладу графа H_2 на цикли (1,7,3,5,4,6,2) і (1,4,3,2,7,5,6). Ребра (3,5) і (2,7) належать до різних компонент розкладу графа H_2, $F_2=\{(3,5),(2,7)\}$, і розклад графа H_2 продовжується до розкладу графа H_3 (рис. 3) на цикли (1,7,3,8,5,4,6,2) і (1,4,3,2,8,7,5,6). Ребра (5,4) і (6,1) належать до різних компонент розкладу графа H_3, $F_3=\{(5,4),(6,1)\}$, і розклад графа H_3 продовжується до розкладу графа H_4 (рис. 4) на цикли (1,7,3,8,5,9,4,6,2) і (1,4,3,2,8,7,5,6,9). Ребра (3,8) і (7,5) належать до різних компонент розкладу графа H_4, $F_4=\{(3,8),(7,5)\}$, і розклад графа H_4 продовжується до розкладу графа H_5 на цикли (1,7,3,10,8,5,9,4,6,2) і (1,4,3,2,8,7,10,5,6,9). Ребра (9,4) і (5,6) належать до різних компонент розкладу графа H_5, $F_5=\{(9,4),(5,6)\}$, і розклад графа H_5 продовжується до розкладу графа H_6 на цикли (1,7,3,10,8,5,9,11,4,6,2) і (1,4,3,2,8,7,10,5,11,6,9).

Для побудови автоморфізмів зручно розглядати окремо графи парних порядків і графи непарних порядків. Автоморфізм $\psi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&1&7&5&8&4&6\end{pmatrix}$ графа H_3 відображає F_3 на F_4, тому ψ_1 продовжується до автоморфізму ψ_3 графа H_5 приєднанням цикла (9,10). ψ_3 в свою чергу відображає F_5 на $F_6=\{(10,7),(5,8)\}$ і тому продовжується до автоморфізму ψ_5 графа H_7 приєднанням до ψ_3 циклу (11,12), і т. д. Компоненти розкладу відображаються одна на другу. Автоморфізм $\psi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&1&4&3&5&7&6&9&8\end{pmatrix}$ графа H_4 відображає F_4 на F_5, тому ψ_2 продовжується до автоморфізму ψ_4 графа H_6 приєднанням цикла (10,11), і т. д. Кожна компонента розкладу відображається на себе. В кожному графі H_t, як парного так і непарного порядку $v\geq 8$ паросполуки F_t і F_{t+1}

відображаються одна на другу автоморфізмом ψ_{t-2} графа F_t (а умови 1), 2), 3) визначають однозначно як F_t так і F_{t+1}). Звідси ясно, що автоморфізм ψ_{t-2} графа H_t порядку $v \geq 8$ продовжується до автоморфізму ψ_t графа H_{t+2} приєднанням цикла (a_{v+1}, a_{v+2}); ψ_t також зберігає розклад графа H_{t+2}, $t = 3, 4, \ldots$.

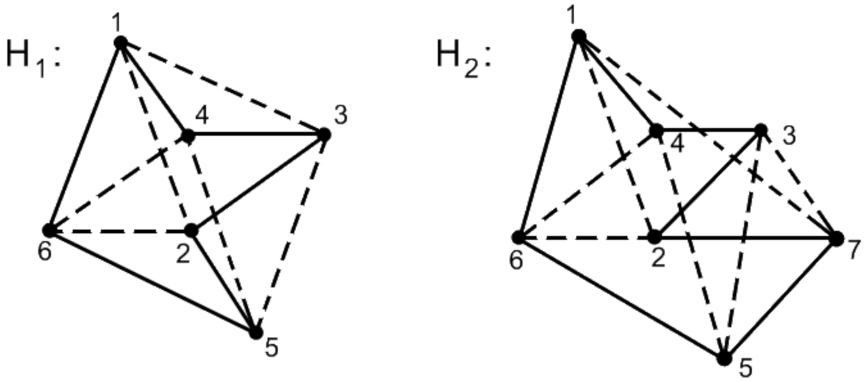


Рис. 2

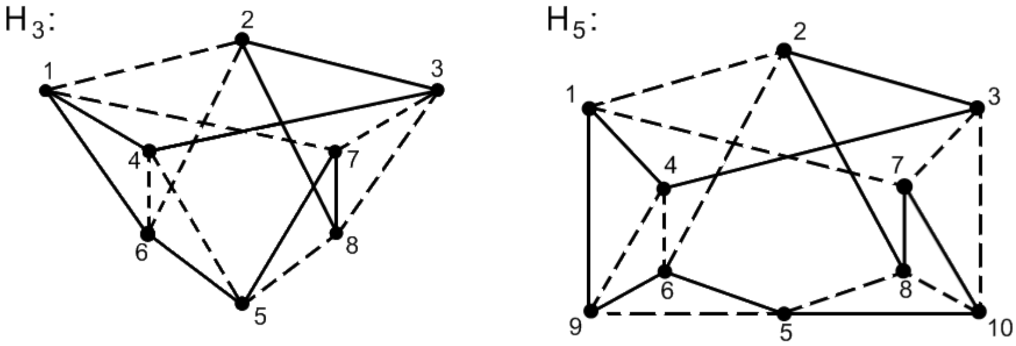


Рис. 3

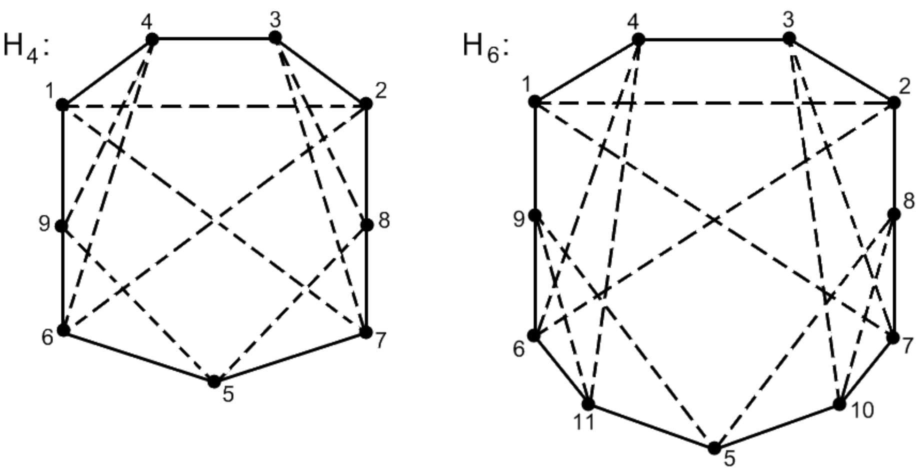


Рис. 4

Властивості графів з (H_t) дозволяють побудувати ізоморфізм 4-регулярного графа G_0 на граф з (H_t) або переконатися, що такого ізоморфізму не існує, шляхом редукції та наступного відновлення графа G_0.

1. *Дослідження*. Перевірити виконання для графа G_0 порядку v властивостей i), ii). Для цього досить розглянути підграфи, породжені вершинами графа G_0 разом з їх оточеннями.

2. *Крок редукції*. Видалити з G_0 обидві зірки порядку 5. До кожного з ланцюгів P_4, породжених оточеннями центрів цих зірок, приєднати паросполуку з двох ребер (така паросполука визначається однозначно).

Над отриманим графом G_2 знову виконати дослідження і крок редукції, і т. д., до побудови ізоморфізму деякого графа H_l з (H_t) на G_s. (Наприклад, легко пересвідчитися, чи ізоморфний деякий граф G_s графу H_2, бо доповнення графа H_2 до K_7 є C_7).

3. *Крок відновлення.* Користуючись автоморфізмом графа H_l, знайти той ізоморфізм ψ H_l на G_s, який відображає паросполуки F_1, F_2, для яких $\theta(H_l, F_1) = H_{l+1}$, $\theta(H_{l+1}, F_2) = H_{l+2}$, відповідно на паросполуки F_1', F_2', які було приєднано на останньому кроці редукції. Побудувати графи $G_{s-1} = \theta(G_s, F_1')$ і $G_{s-2} = \theta(G_{s-1}, F_2')$ та продовжити ізоморфізм ψ до ізоморфізму H_{l+2} на G_{s-2}.

Виконати крок відновлення, де в ролі H_l та G_s виступатимуть H_{l+2} та G_{s-2}, і т. д., до побудови ізоморфізму деякого H_t на G_0.

Якщо для деякого графа G_r не виконується i) або ii), якщо крок редукції виконати неможливо, або якщо виявиться, що деякий граф G_r не ізоморфний графу того ж порядку з (H_t), то і G_0 не ізоморфний графу з (H_t).

В [1] зокрема вивчаються розклади повних графів на зв’язні регулярні графи. Можливо, знадобиться перевірка на ізоморфізм компонент розкладу, які є графами з (H_t). Наприклад, граф H_4 порядку 9 самодоповняльний, тобто, K_9 розкладається на дві компоненти, ізоморфні графу H_4.

ПОСИЛАННЯ

[1] Донец Г.А., Петренюк А. Я.(2009). Экстремальные покрытия графов. Кіровоград, *«Комбінаторні конфігурації»*.

[2] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. (1990). *Лекции по теории графов. М.*, «Наука».

[3] Шевченко К. М.(2011).Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 11-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 15-16 квітня 2011 р., Кіровоград,* 194-198.

УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТИВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ.

Ю. В. ЯРЕМЕНКО, О. О. ШЕСТЕРНІНА

Описаны миноры второго и третьего порядка нетеровых полусовершенных колец дистрибутивно модульного типа.

The minors of orders 2 and 3 of noetherian semi-perfect rings of distributive module type are described.

Розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо $K\cap(L+N)=K\cap L+K\cap N$ для будь-яких підмодулів K, L, N.

Модуль називається *напівдистрибутивним,* якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.