

[12] Романов В.О. (2004). Згортки з неперервними векторними мірами. *Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки.* **57**, 88-91.

[13] Романов В.А. (2005).Свертки с дифференцируемыми мерами. *Математика, економіка, інформатика : актуальні проблеми та методика викладання : Матеріали обласної науково-практичної конференції (10-12 березня 2005 р.)* – Кіровоград, 23-25.

[14] Романов В.А. (2007). *Дифференцируемые векторные меры.* – Кіровоград: РИО КГПУ.

[15] Романов В.А. (2011).Критерии подпространственной непрерывности векторных мер и сходимостъ порождаемых линейных операторов *Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки.* **70**, 63-71.

[16] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. (1985). *Вероятностные распределения в банаховых пространствах.* – М.: Наука.

[17] Романов В.А.(1995).. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мерю. *Математические заметки.* **57**, № 2, 310-312.

УДК 51(09)

ІСТОРІЯ ДОПОМАГАЄ ПОШУКАМ

З.Ю.ФІЛЕР

Рассматривается история решения неравенств в комплексном множестве от леммы Д'Аламбера до работ А.В.Кужеля и автора. Показано, как работы прошлого могут стать источником новых идей.

The history of solutions in a complex set of inequalities is considered from the lemma d'Alembert to the works of A.V.Kuzhel and author. Here, it's shown how the work of the past can be a source of new ideas.

У 1950-51 навч. році автор познайомився з книгою [1], написаною цікаво й доступною мовою. Особливо сподобався історичний огляд розвитку теорії алгебраїчних рівнянь, розповіді про судьби її творців. Зацікавило доведення основної теореми алгебри, **лема Д'Аламбера**. Здалося, що саме вона є основою доведення Гаусса 1799 г.; виглядало зовсім логічним застосування пошуку *комплексного* розв'язку h нерівності $ah^k / f(x_0) < 0$ при комплексних $a, f(x_0)$ і натуральному k . Там знаходилося значення h , при якому $\arg(ah^k / f(x_0)) = \pi$. Далі визначалося достатнє значення модуля, яке

гарантувало виконання нерівності $|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|$. Таким чином, конструювався алгоритм побудови збіжної в собі послідовності $\{f(x_k)\}$, яка вела до кореня многочлену $f(x)$, бо $f(x_k) \rightarrow 0$. Тоді автор ще не знав теорії дійсних чисел та замкненості комплексної площини. Приклад знаходження комплексного h не свідчив про існування комплексних розв'язків нерівностей *взагалі* і методів їх знаходження.

Автор неодноразово розповідав студентам доведення леми Д'Аламбера, звертаючи увагу на *циклічний* характер побудови послідовності $x_k \rightarrow \bar{x}$, яка веде до якогось кореня рівняння $f(x) = 0: x_k \rightarrow \bar{x}$. Але вже тоді звертав увагу на контр приклад – не існує кореня у рівняння $e^x = 0$, хоча побудувати збіжну до 0 послідовність $\{f(x_k)\}$ можна від будь-якого комплексного x_0 . Ситуація пояснюється рис. 1.

Знайомство з шкільними підручниками, роздуми про методику розв'язання рівнянь та нерівностей, привели до пропозиції використовувати *метод нев'язки* розв'язання нерівностей [2]. У 1999 р. автор запропонував

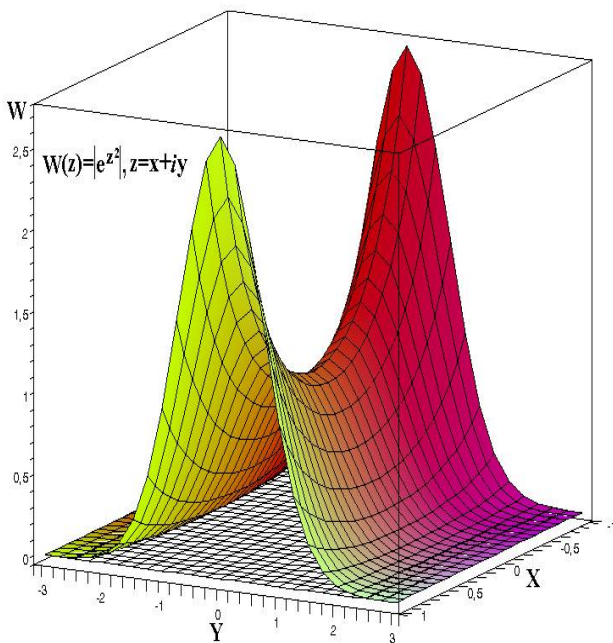


Рис. 1

тему дипломної роботи «Нерівності в науці та навчанні», де порадив застосувати цей метод до «шкільних» нерівностей. У випадку відсутності *дійсних* розв'язків, він дає *комплексні* розв'язки. Суть метода полягає в тому, що в меншу частину додається нев'язка $r > 0$, що перетворює нерівність в *рівняння з параметром*. Наприклад, нерівність $x^2 + 4x + 5 < 0$ дає рівняння $x^2 + 4x + 5 + r = 0$, корені якого

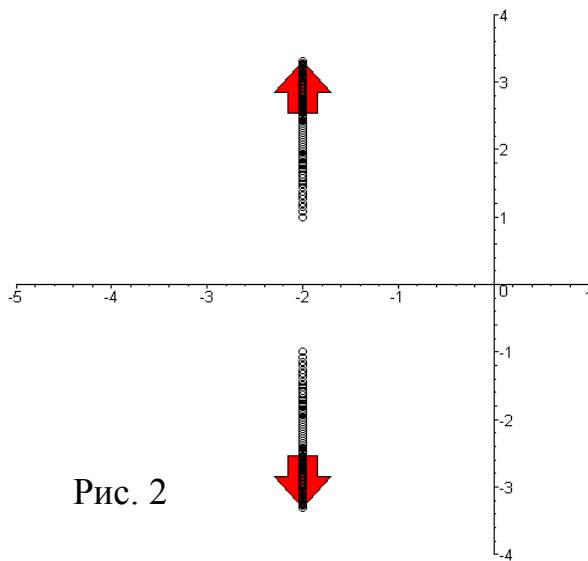


Рис. 2

$x(r) = -2 \pm i\sqrt{1+r}$ при $r > 0$, дають множину комплексних розв'язків (рис.2).

У 1999 р. в Одеському університеті відбулася наукова конференція, присвячена 200-річчю доведення Гауссом основної теореми алгебри (ОТА). Ми в тоді сформулювали *теорему про нерівності*: *многочленна нерівність*

$f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) з довільними комплексними коефіцієнтами a_k має хоча б комплексні розв'язки. Її доведення миттєво випливає з ОТА, бо нерівність зводиться до рівняння з вільним членом $a_0 + r$ ($a_0 - r$). Ясно, що її міг запропонувати й сам Гаусс ще 200 років до того. Цікаво, як через майже 50 років поштовх, наданий елементом доведення леми Д'Аламбера, спрацював у пошуку комплексних розв'язків.

Г.М.Шапіро, автор [1], відсутній у довіднику [3]. Він народився в 1903 р. в Одесі. У 1921 р. вступив у ОІНО, де працювали відомі геометри С.О.Шатуновський й В.Ф.Каган. Там зблизився з М.Г.Крейном и Ф.Р.Гантмахером. В 1925 р. С.О.Шатуновський пише на своїй книзі: «Моему любимому и глубоко уважаемому ученику Г.М.Шапиро от автора». У 1926 р. він вступив у Москві в аспірантуру к В.Ф.Кагану. Працював у семінарі по векторному и тензорному аналізу. В 1935 р. видана книга «Высшая алгебра», яка за 3 роки витримала 4 видання (вона була перекладена й на українську мову). З 1929 до 1941 рр. він професор Моспедінституту, з 1935 р. працює й в МДУ. Після участі в московському ополченні по стану здоров'я звільняється з Армії й приїздить у Куйбишев, до евакуйованої родини. Там він стає

першим завідувачем кафедрою математики створюваного авіаінституту. Там він вмирає в 1942 р., проживши, на жаль, тільки 39 років.

Пізніше автор розглянув й метод комплексної нев'язки, коли $r = s + it, s > 0, \forall t$. При $s = 0$ необхідно $t > 0$ Готуючи лекції з курсу «Числові системи», автор познайомився з книгою [4, с.31-32, 34] українського автора. Процітуємо її. «Зауважимо, що досить поширеною є думка про неможливість упорядкувати множину комплексних чисел, тобто ввести у множині \mathbb{C} відношення $<$ або $>$. Насправді це не так. Домовимося комплексне число $z = a + bi$ вважати меншим за комплексне число $\lambda = c + di$ і писати: $z < \lambda$, якщо $a < c$, або якщо $a = c$ і $b < d$. Наприклад: $100i < 2 < 2 + i < 3 - 500i$ Визначене так відношення $<$ у множині комплексних чисел: а) *антисиметричне* – якщо $z < \lambda$, то відношення $\lambda < z$ неможливе; в) *транзитивне* – якщо $z < \lambda$, $\lambda < \mu$, то $z < \mu$; в) *зв'язне* – якщо $z \neq \lambda$, то або $z < \lambda$, або $z > \lambda$комплексні числа можна за певними правилами порівнювати.

Примітка. Крім поняття «упорядкована множина» є ще поняття «упорядковане поле». Поле комплексних чисел упорядкувати не можна, тому що крім вимог антисиметричності, транзитивності і зв'язності для упорядкованого поля повинна виконуватись ще одна умова: якщо $a > 0$, то $a^2 > 0$. А ввести відношення $>$, для якого виконувалися б всі чотири умови, в множині комплексних чисел не можна.». Серед вправ є 4. *Розмістити числа $3 + 5i$, $2i$, $3 - 5i$, 2 у порядку зростання*; 5. *Розв'язати нерівність $(2 + i)z < 1 - i$* . Відповідей на них не дано, як не дано й правила розв'язання вправи 5.

Зберегти шкільні правила (при діленні на додатне число знак нерівності зберігається), то розв'язком буде: $z < (1 - i)/(2 + i) = (1 - 3i)/5$ тут не вдається [6].

Розв'яжемо цю нерівність методом «комплексної нев'язки» $r = s + it$, яку додаємо в ліву (меншу) частину нерівності: $(2 + i)(x + iy) + s + it = 1 - i \Rightarrow 2x - y + s = 1, x + 2y + t = -1, s > 0, \forall t$ або при $s = 0, t > 0$. На відміну від методу дійсної

нев'язки, яка дає відрізок *прямої*, метод *комплексної невязки* дає *півплощину* – двомірний об'єкт – множину точок $z(s,t)$. Метод *дійсної невязки* дає його $z(s,0)$. Навіть для дійсних нерівностей можна розглядати *комплексні розв'язки*. Для прикладу $2x < 3$, замість числової *півосі* $x < 3/2$ буде *півплощина* $x < 3/2$, $\forall u$ с частковою границею $x=1.5, u < 0$; комплексний розв'язок з дійсною невязкою дає одновірну множину, а з комплексною невязкою – двовимірну.

На жаль, у [3] немає згадки про автора [4]. У «Математика в СРСР 1958 – 1967. Т.2» на с. 704 читаємо: «Кужель Александр Васильевич, род. 19 февр. 1930 г. в г. Николаеве, окончил Николаевский пед. ин-т (1954), канд. физ.-матем. наук (1960), доцент (1962)». Там наведена бібліографія з 23 назв. У своїй «Математичній автобіографії» (Сімферополь, 1999) він наводить ще 76 назв. Книга [4] міститься там під номером 36. З 1958 р. він працює в Уманському педінституті, і захищає в 1959 р. кандидатську дисертацію. У 1969 р. він захистив докторську дисертацію. Оponentами були М.С. Лівшиць, І.С. Іохвідов, Ю.Л. Далецький. Зовнішній відгук написав М.Г.Крейн. Перший з опонентів працював в Кіровограді зразу після війни. Учень М.Г.Крейна, Ю.Л. Далецький, працював у Київській політехніці, а його вчитель деякий час працював у Сталіно (Донецьку). В Умані Кужель завідував кафедрою і був деканом фізмату. У 1970 р. О.В.Кужель перейшов до новоствореного Сімферопольського університету. З жалем я узнав, що його вже немає. Його син зараз працює в Інституті математики НАН України.

Квадратні нерівності в широкому смислі розглянуто також на прикладі $x^2+4x+5<0$. Методом комплексної невязки $s+it$ для комплексного аргументу $x+iy$; отримаємо лінії $y^2-(x+2)^2=1+s, 2(x+2)y=-t; s>0$, при $s=0$ и $t>0$. Це **гіперболи** з вертикальним розташуванням вершин на прямій $x=-2$, та півосями $a=b=\sqrt{1+s}$ и граничною пів гіперболою при $s=0$ [6, с. 7]. Вона зображена там товстою лінією. При нерівностях у вузькому смислі, була тільки дійсна **вісь** цих гіпербол. Нерівність $x^2+4x+3>0$ еквівалентна

рівнянням $(x+2)^2 - y^2 = 1+s$, $2(x+2)y=t$, $s>0$; при $s=0 \Rightarrow t>0$. При $s>0$ це гіперболи з вершинами на осі Ox . При $s=0$ отримаємо граничну гіперболу (рис. 3).

Розглянемо ще приклад $x^2+4x+5>0$. У множині дійсних чисел розв'язком будуть всі точки дійсної осі. Для пошуку комплексних розв'язків застосуємо спочатку метод дійсної нев'язки $r>0$: $x^2+4x+5=r$, звідки $x = -2 \pm \sqrt{4-(5-r)} = -2 \pm \sqrt{r-1}$. При $r \geq 1$ отримаємо дійсні розв'язки; $r < 1$ дасть *комплексні* значення $x = -2 \pm i\sqrt{1-r}$. Розв'язки зображуються у вигляді хреста з нескінченною горизонтальною поперечиною [6, рис. 8].

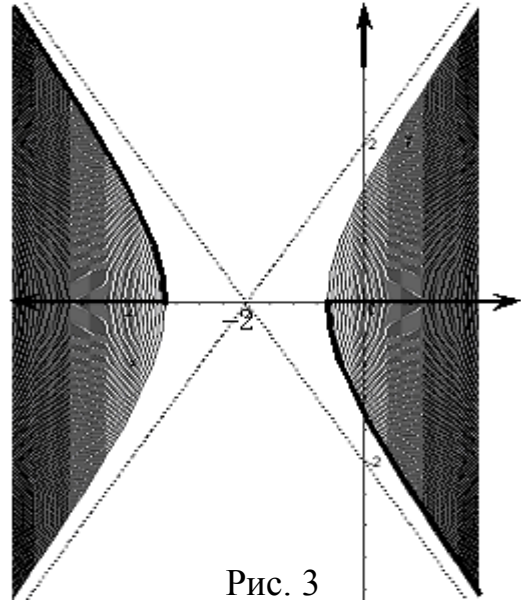


Рис. 3

Методом комплексної нев'язки $s+it$ для комплексного аргументу $x+iy$, отримаємо лінії $y^2 - (x+2)^2 = 1-s$, $2(x+2)y=t$, $1>s>0$; при $s=0$ і $t>0$. Це **гіперболи** з горизонтальним розташуванням вершин на прямій $y=0$. Асимптоти гіпербол належать області розв'язків при $s=1$.

Нерівність $a < f(z) < b$ еквівалентна рівнянню з комплексною нев'язкою $r = s+it = (f(z)-a)/(b-a) \equiv \varphi(z)$, бо вона еквівалентна рівнянню $f(z) = a + r(b-a)$. Переходячи до дійсної та уявної частин функції $\varphi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $0 < s < 1$, $\forall t$; при $s=0$ буде лінія $u(x,y)=0$; $v(x,y)>0$ з тої сторони півплощини, куди «дивиться» $\text{grad}u(x,y)$. Границя включена там, куди «показує» $\text{grad}v(x,y)$ від точки перетину $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$. При $s=1$ – друга *границя* області; її частина, з перпендикуляром $-\text{grad}v(x,y)$, включена в область - розв'язок.

Описаний спосіб порівняння комплексних чисел не єдиний. Можна вводити відношення $<$ для комплексних чисел в тригонометричній формі, вважаючи меншими числа, у яких модуль менше; якщо їх модулі рівні, менше те число, у якого аргумент менше (при цьому аргументи беруться з

відрізку $[0, 2\pi)$.

* * *

Ми розповіли, як може допомогти історія математики розвитку навіть усталеної, освяченої традиціями, галузі. Перехід до погляду на розв'язання нерівностей як на пошук множини точок, які визначаються «додатним» комплексним параметром r , *структурує* множину розв'язків. Це дає змогу застосовувати для її побудови сучасні ЕОМ, які мають для цього відповідні програми. Сепарабельність множини $s = u(x, y), t = v(x, y)$ дає можливість прийняти достатньо густу сітку в шуканій області.

Нами запропонований алгоритм знаходження комплексних коренів функцій $f(x)$, які приймають дійсні значення при дійсних значеннях аргументу. Він ґрунтується на *теоремі*: точка x_0 додатного мінімуму увігнутого графіка функції $f(x)$ є дійсною частиною комплексного кореня рівняння $f(x) = 0$. Аналогічне твердження є для опуклого від'ємного максимуму. Це впливає із локальної заміни $f(x)$ її многочленом Тейлора в околі точки x_0 : $f(x_0 + iy) \approx f(x_0) + f''(x_0)/2(x - x_0)^2$, Тоді наближення до уявної частини кореня є $y = \sqrt{2f(x_0)/f''(x_0)}$. Далі можна застосувати алгоритм уточнення, наприклад, методом Ньютона: $z_1 = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$. Знаменник тут не рівний 0 для простого кореня. Зараз в навчальних посібниках пропонують від рівняння для комплексного $z = x + iy$ переходити до *системи* рівнянь $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = 0, \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 0$ [5]. Тут значною проблемою є пошук початкового наближення z_0 .

Посилання

[1] Шапиро Г.М. (1938) *Высшая алгебра. Учебник для педвузов*. Изд. 4. – М.: Учпедгиз

[2] Ткаченко С.П., Філер З.Ю. (2003) Комплексні розв'язки квадратної нерівності// *Матем. в школі*, №2. – С. 47–49.

- [3] Бородин А.И., Бугай А.С. (1987) *Выдающиеся математики: Биогр. слов. - справ.* 2-е изд., пер. и доп. – К.: Рад. шк.
- [4] Кушель О.В. (1974) *Развиток понятия про число. Ознаки подільності. Досконалі числа.* – Київ: Вища школа.
- [5] Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. (2006) *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9* (Самоучитель). – М.: ИТ Пресс.
- [6] Филер З.Е. (2010) Неравенства в различных полях// *Наукові записки.- Вип. 69.- Серія: Математичні науки.* – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. Винниченка. – С. 108–113.

УДК 519.1751

ПОБУДОВА ІЗОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ 4-РЕГУЛЯРНИХ ГАМІЛЬТОНОВО РОЗКЛАДНИХ ГРАФІВ

К. М. ШЕВЧЕНКО

Из гамильтоново разложимых $2k$ -регулярных графов строятся $2k$ -регулярные графы более высоких порядков таким образом, что решается проблема изоморфизма графов в некоторых множествах путем редукции.

The $2k$ -regular graphs of superior order are built out of Hamiltonian decomposable $2k$ -regular graphs in such a way that the problem of the isomorphism of graphs in some sets is solved by reduction.

Гамільтонові розклади графа є його мінімальними C -розкладами. В [1] зроблено огляд результатів щодо існування гамільтонових розкладів різних добутків а також реберних графів гамільтонічно розкладних графів.

Основну термінологію і позначення взято з [1]. Тут терміни «група графа» і «розклад» вживаються в розумінні «група всіх автоморфізмів графа» (група підстановок) і «гамільтонів розклад графа», відповідно.

Означення 1. Позначимо через $\theta(H, F)$ граф, отриманий в результаті підрозбиття [2] кожного ребра u_i деякої паросполуки F графа H порядку ν новою вершиною b_i і наступного топологічного склеювання всіх нових вершин b_i в одну вершину $a_{\nu+1}$ [3].