Теорема. *Нехай матриці системи рівнянь* (1) *голоморфні в області* (2). *Тоді існують формальні ряди* (7), (8), *коефіцієнти яких голоморфні в області* (2) *такі, що* $\det\Phi(x,0)\neq 0$ *при* $|x|\leq x_1 < x_0$ *і формальне перетворення з матрицею заміни* (7) *приводить систему* (1) *до системи* (38), (39).

ПОСИЛАННЯ

[1] Вазов В.(1968). *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.*-М.:Мир.

[2] Wasow W. (1985). *Linear turning point theory.* - Springer – Verlag New York Ins..

[3] Lee R.Y.(1969)/ On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point .*J. Math. Anal. and Appl.* **27**, 501 – 510.

[4] Hanson R.J.(1966)/ Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point .J. *Math. Anal. And Appl.* **16,** 280 – 301.

[5] Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point. (1974). *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **149,** 3 - 106.

[6] Turritin H.L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation (1950). *Trans. Am: Math. Soc.* **68**, 304 - 329.

[7] Самойленко А.М.(2002) Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. *Укр. мат. журн.* **54**, № 11, 1505- 1516.

[8] Ключник І.Г. (2010). Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту. *Укр. мат. журн.* **62**, № 5, 625 – 642.

УДК 519.53+517.987

НЕПРЕРЫВНО СУММИРУЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВАРИАЦИОННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В. А. РОМАНОВ

Досліджено властивість неперервного підсумовування лінійних операторів в просторах вимірних функцій. Також в термінах цієї властивості отриманий критерій варіаційної неперервності векторної міри.

The property of continuous summation of linear operators in the spaces of measurable functions is investigated. Also a criterion for continuity with respect to variation of vector measure in the terms of this property is established.

1. Введение. При исследовании мер, заданных в топологических векторных пространствах, в целом ряде случаев возникают те или иные линейные непрерывные операторы. Это могут быть корреляционные операторы, рассмотренные для гильбертовых пространств в работе [1], стохастические операторы, являющиеся структурными элементами уравнений в статистических задачах оптимального управления [2], положительные операторы Гильберта-Шмидта, которые появляются при построении ядерной топологии Сазонова [3], оказываются полезными при исследовании свойства счетной аддитивности функций множества, заданных своими конечномерными проекциями [4], и которые применяются при аппроксимации непрерывных мер дифференцируемыми [5] и аналитическими [6]. Это также могут быть эллиптические операторы, входящие в структуру дифференциальных уравнений для мер [7 – 10], и операторы свертки, порождаемые скалярными мерами в пространствах измеримых функций [11] и векторными мерами в пространствах скалярных мер [12 – 14]. Кроме того, в работе [15] были доказаны операторные критерии непрерывности векторных мер относительно сходимостей на системе измеримых множеств и относительно полувариации. В связи с тем значением, которое для векторных мер имеет сходимость относительно вариации, представляет интерес получение операторного критерия и для вариационной сходимости.

2. Постановка задачи. Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, то есть полное сепарабельное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство, У - банахово пространство.

Всюду в дальнейшем под измеримостью множеств и функций понимаем их измеримость относительно борелевских сигма-алгебр.

Пусть F(X) - пространство ограниченных вещественных измеримых функций на X, а F(X,Y) - пространство ограниченных измеримых функций на X со значениями в У. Каждое из этих функциональных пространств наделяем соответствующей чебышевской нормой.

Под векторными мерами в X понимаем счетно-аддитивные функции множества , имеющие конечную полную вариацию, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающие значения в пространстве У .

Для функции из F(X) ее ненулевыми точками называем все такие точки из X, в которых она не обращается в нуль.

Под единичным шаром пространства F(X) понимаем замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле. Пусть h - вектор пространства X .

Определение 1. Непрерывный линейный оператор A, действующий из пространства F(X) в пространство F(X,Y) , называется *непрерывно суммирующим по направлению h ,* если для любого положительного числа e существует такое зависящее только от него положительное число d , что для каждого вещественного t из условия $|t| < d$ следует, что для любой системы , состоящей из конечного числа элементов f_k единичного шара пространства F(X) с попарно непересекающимися множествами ненулевых точек, выполняется неравенство

$$\sum_k \|(Af_k)(th) - (Af_k)(0)\| < e. \qquad (1)$$

Определение 2. *Оператором свертки, порождаемым векторной мерой m ,* называется оператор Q , действующий из пространства F(X) в пространство F(X,Y), значение которого на каждой скалярной ограниченной измеримой функции f представляет собой векторную функцию, заданную в произвольной точке x из X формулой

$$(Q\,f)(x) = \int f(x - z)\,dm(z), \qquad (2)$$

где интегрирование производится по всему пространству X .

Под *сдвигом векторной меры* m *на вектор* h *из* X понимаем векторную меру m_h, значение которой на каждом измеримом множестве B задается формулой $m_h(B) = m(B + h)$.

Определение 3. Векторная мера называется *вариационно непрерывной по направлению* h, если при сдвиге меры на вектор th и стремлении коэффициента t к нулю ее приращение имеет нулевой предел в смысле сходимости по вариации.

Цель статьи состоит в исследовании свойства непрерывного суммирования линейных непрерывных операторов, а также в доказательстве критерия вариационной непрерывности векторной меры в терминах указанного свойства.

3. Результаты работы. Напомним, что *индикатором множества* B называется функция, которая в точках самого множества B принимает значение 1, а в остальных точках – значение 0.

Будем говорить, что линейный непрерывный оператор A, действующий из пространства $F(X)$ в пространство $F(X,Y)$, имеет свойство непрерывного суммирования *на системах индикаторов* по направлению h из X, если для любого положительного числа e существует такое зависящее только от него положительное число d, что при $|t| < d$ неравенство (1) выполняется для любой системы, состоящей из конечного числа *индикаторов* попарно непересекающихся измеримых подмножеств пространства X.

Теорема 1. *Пусть A - линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $F(X)$ в пространство $F(X,Y)$. Тогда для выполнения условия его непрерывного суммирования по направлению h из X необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялось условие непрерывного суммирования на системах индикаторов по направлению h.*

Доказательство. Необходимость обеспечивается тем обстоятельством, что индикаторы измеримых подмножеств пространства X входят в единичный шар пространства F(X). Поэтому остается доказать достаточность.

Пусть условие непрерывного суммирования выполняется на системах индикаторов. Требуется доказать, что оно выполняется и на системах, состоящих из произвольных элементов единичного шара пространства F(X) .

Сначала докажем, что это условие выполняется на системах, состоящих из так называемых *простых элементов* единичного шара (как всегда, с попарно непересекающимися множествами ненулевых точек), где под *простыми элементами единичного шара* понимаем линейные комбинации конечного числа индикаторов попарно непересекающихся измеримых множеств с такими коэффициентами, модуль которых не превосходит 1.

Рассмотрим систему из конечного числа простых элементов g_k указанного вида, представляющих собой линейные комбинации с некоторыми коэффициентами a_{kj} (по модулю не превосходящими 1) индикаторов W_{kj} некоторых попарно непересекающихся измеримых множеств.

Тогда из линейности оператора A и обычных свойств нормы следует, что величина

$$\sum_k \| (A\, g_k)(th) - (A\, g_k)(0) \| \qquad (3)$$

не превосходит величины

$$\sum_k \sum_j |a_{kj}| \, \| A\,(W_{kj})(th) - A\,(W_{kj})(0) \| . \qquad (4)$$

Поскольку $|a_{kj}| \le 1$ и поскольку на системах индикаторов условие непрерывного суммирования предполагается выполненным, то для любого положительного числа e существует зависящее только от него такое положительное число d , что при $|t| < d$ величина (4), а тем более и величина (3), становится меньшей e .

Таким образом, на системах, состоящих из простых элементов единичного шара, условие непрерывного суммирования выполняется.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из n произвольных элементов f_k единичного шара (как всегда, с попарно непересекающимися множествами ненулевых точек). Поскольку каждая ограниченная измеримая функция может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых функций, то для заданного положительного числа e можно построить такие простые элементы g_k единичного шара, которые имеют попарно непересекающиеся множества ненулевых точек и для которых выполняются неравенства $\|A\| \, \| f_k - g_k \| \le \frac{e}{3n}$, $1 \le k \le n$.

Из общих свойств нормы следует, что левая часть неравенства (1) не превосходит суммы B + C + D трех величин, где

B = $\sum_k \| A\,(f_k - g_k)(th)\|$, C = $\sum_k \| (A\,g_k)(th) - (A\,g_k)(0)\|$,

D = $\sum_k \| A\,(g_k - f_k)(0)\|$. Ясно, что первая и третья из этих величин не превосходят $\|A\| \sum_k \| f_k - g_k \| < \frac{e}{3}$.

Что же касается второй из них, то ввиду уже доказанной выполнимости условия непрерывного суммирования на системах, состоящих из простых элементов единичного шара, ее тоже можно сделать меньшей числа e/3 , если $|t|$ меньше некоторого зависящего только от e положительного числа d . Но тогда из условия $|t| < d$ следует выполнимость неравенства (1), чем и завершается доказательство достаточности.

Теорема 2. *Пусть m - векторная мера в сепарабельном пространстве Фреше X, h - произвольный элемент из X. Тогда для вариационной непрерывности m по направлению h необходимо и достаточно, чтобы порождаемый этой мерой оператор свертки Q имел свойство непрерывного суммирования по направлению h .*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть m вариационно непрерывна по направлению h . Тогда для любого положительного числа e существует такое положительное число d, что из условия $|t| < d$ следует выполнимость неравенства

$$\mathrm{Var}\ (\ m_{th}\ -\ m\ ) < e. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что при указанных t для любой системы, состоящей из конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств B_k , выполняется неравенство

$$\textstyle\sum_k \| \,(m_{th} - m)(\,B_k\,)\| < e. \qquad (6)$$

Из формулы (2), задающей оператор свертки, вытекает, что векторная величина, находящаяся под знаком нормы в левой части неравенства (6), совпадает с векторной величиной (Q f_k)(th) - (Q f_k)(0) , где f_k - индикатор множества (- B_k).

Обозначим A = Q . Тогда для таких функций f_k левая часть неравенства (6) превращается в левую часть неравенства (1). Следовательно, оператор Q имеет свойство непрерывного суммирования на системах индикаторов .Но тогда по теореме 1 этот оператор имеет свойство непрерывного суммирования и на системах, состоящих из произвольных элементов единичного шара (с попарно непересекающимися множествами ненулевых точек), чем и завершается доказательство необходимости .

Теперь докажем достаточность. Пусть Q имеет свойство непрерывного суммирования по направлению h . Положим A = Q. Пусть числа e, d - такие же, как в определении 1. Предположим также , что $|t| < d$.

Рассмотрим произвольную систему, состоящую из конечного числа попарно непересекающихся измеримых подмножеств B_k пространства X. Обозначим через f_k индикаторы множеств (- B_k). Тогда для системы таких индикаторов выполняется неравенство (1). С учетом равенства A = Q и формулы (2), задающей оператор свертки, получаем, что левая часть неравенства (1) превращается в левую часть неравенства (6).

Переходя теперь в левой части неравенства (6) к верхней грани по всем системам, состоящим из конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств B_k , получаем, что при $|t| < d$ будет справедливо неравенство Var ($m_{th} - m$) $\leq \epsilon$, откуда и вытекает достаточность.

Замечание 1. Если пространство У имеет свойство Радона-Никодима [16, c.106] (в частности, У = l_p , 1$< p < \infty$), то для мер со значениями в У условия вариационной и полувариационной непрерывности эквивалентны [17], а потому из теоремы 2 и результатов работы [15] следует, что для оператора свертки со значениями в таком пространстве условие непрерывного суммирования по направлению h равносильно тому, что данный оператор каждое ограниченное множество в F(X) переводит в множество функций, которое равностепенно непрерывно по направлению h.

Замечание 2. Поскольку для пространств У = c_0 сходящихся к нулю последовательностей и У = l_∞ ограниченных последовательностей вещественных чисел с их обычными нормами не каждая полувариационно непрерывная мера со значениями в У вариационно непрерывна [17], то существуют операторы свертки со значениями в этих пространствах, которые при отсутствии для них свойства непрерывного суммирования по направлению h каждое ограниченное множество в F(X) переводят в множество функций, равностепенно непрерывное по направлению h. В качестве таких операторов можно указать операторы свертки векторных мер, построенных в ходе доказательства теоремы 1 работы [17] и в замечании 1 той же работы.

Замечание 3. Поскольку в бесконечномерных пространствах X никакая нетривиальная мера не может быть непрерывной по всем направлениям из X, то из теоремы 2 следует, что для таких X никакой ненулевой оператор свертки не может быть непрерывно суммирующим по всем направлениям .

Замечание 4. Поскольку в бесконечномерных пространствах X (в частности, гильбертовых) существуют нетривиальные меры (как скалярные, так и векторные), которые непрерывны по направлениям из всюду плотного подпространства (например, невырожденные гауссовские, а также их произведения на интегрируемые по Бохнеру векторные функции), то соответствующие операторы свертки имеют свойство непрерывного суммирования по направлениям из всюду плотного в X подпространства.

ССЫЛКИ

[1] Прохоров Ю.В.(1956). Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. *Теория вероятностей и ее применения*. **1**, № **2**, 177-238.

[2] Мизгайлов В.Н., Мухин В.В., Романов В.А. (1979). Об оптимальной статистической регуляризации операторных уравнений с ограничением на норму решения. *Журн. вычислительной математики и математической физики.* **19,** № **4**, 1036-1040.

[3] Сазонов В.В. (1958). Замечание о характеристических функционалах . *Теория вероятностей и ее применения.* **3**, № **2,** 201-205.

[4] Колмогоров А.Н. Замечания о работах Р.А. Минлоса и В.В. Сазонова .(1959). Там же, **4**, № **2,** 237-239.

[5] Романов В.А. (1981).Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве. *Украинский математический журнал.* **33,** № **2,** С. 215-219.

[6] Романов В.А. .(1992).Пределы аналитических векторных мер Там же. **44**, № **8**, 1133-1135.

[7] Угланов А.В. (1971). Уравнение теплопроводности для мер в оснащенном гильбертовом пространстве. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. **26**, № **1,** 52-60.

[8] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.(1983). *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* – М.: Наука.

[9] Романов В.А. (2000). *Применения мер к дифференциальным уравнениям..* – Кировоград.

[10] Романов В.О. (2002).Різні види неперервності початкової умови в задачі Коші для векторних мір. *Наукові записки КДПУ. Серія фізико-математичних наук.* **43**, 79-82.

[11] Романов В.А.(1989). Интегральные операторы, порождаемые Н-непрерывными мерами. *Украинский математический журнал.* **41,** № **6**, 769-773.

[12] Романов В.О. (2004). Згортки з неперервними векторними мірами. *Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки.* **57**, 88-91.

[13] Романов В.А. (2005).Свертки с дифференцируемыми мерами. *Математика, економіка, інформатика : актуальні проблеми та методика викладання : Матеріали обласної науково-практичної конференції (10-12 березня 2005 р.)* – Кіровоград, 23-25.

[14] Романов В.А. (2007). *Дифференцируемые векторные меры*. – Кировоград: РИО КГПУ.

[15] Романов В.А. .(2011).Критерии подпространственной непрерывности векторных мер и сходимость порождаемых линейных операторов *Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки.* **70**, 63-71.

[16] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. (1985). *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*. – М.: Наука.

[17] Романов В.А(1995).. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мерю. *Математические заметки.* **57, № 2**, 310-312.

УДК 51(09)

ІСТОРІЯ ДОПОМАГАЄ ПОШУКАМ

З.Ю.ФІЛЄР

Рассматривается история решения неравенств в комплексном множестве от леммы Д'Аламбера до работ А.В.Кужеля и автора. Показано, как работы прошлого могут стать источником новых идей.

The history of solutions in a complex set of inequalities is considered from the lemma d'Alembert to the works of A.V.Kuzhel and author. Here, it's shown how the work of the past can be a source of new ideas.

У 1950-51 навч. році автор познайомився з книгою [1], написаною цікаво й доступною мовою. Особливо сподобався історичний огляд розвитку теорії алгебраїчних рівнянь, розповіді про судьби її творців. Зацікавило доведення основної теореми алгебри, **лема Д'Аламбера.** Здалося, що саме вона є основою доведення Гаусса 1799 г.; виглядало зовсім логічним застосування пошуку *комплексного* розв'язку h нерівності $ah^k / f(x_0) < 0$ при комплексних $a, f(x_0)$ і натуральному k. Там знаходилося значення h, при якому $\arg(ah^k / f(x_0)) = \pi$. Далі визначалося достатнє значення модуля, яке