УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

І. Г. КЛЮЧНИК, Д. Г. ЗАВІЗІОН

Получено асимптотический метод интегрирования линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

The obtained asymptotic method of integration linear system of differential equations with small parameter with a turning point.

В даній статті одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних.

В [1-8] приводиться огляд літератури і пропонуються методи формального спрощення для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з точкою звороту.

Розглянемо систему вигляду

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1$$

$$\varepsilon y'_1 = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \qquad (1)$$

де $y \in R^p, y_1 \in R^m$, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x) -$ голоморфні при

$$|x| \le x_0 \qquad (2)$$

матриці, а $B(x) - m \times m -$ вимірна матриця вигляду

$$B(x) = xI_2 + N, \qquad (3)$$

де $N -$ нільпотентна матриця, а ненульові елементи матриці I_2 визначаються з рівності

$$\{I_2\}_{m1} = 1, \{I_2\}_{m,m-i} = a_{i+1}(x), \{I_2\}_{mm} = 0, i = \overline{1, m-2}.$$

Будемо вважати, що

$$trB_1(x) = trA(x) \equiv 0. \qquad (4)$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \qquad (5)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \qquad (6)$$

де

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_n, \qquad (8)$$

C_n, D_n – сталі матриці відповідно розмірностей $p \times m, m \times p$ елементи яких є нулі, крім $\{C_n\}_{in} = c_{in}, \{D_n\}_{ni} = d_{ni}, i = \overline{1,p}$, а матриці $U(x), U_n(x) -$ $p \times p$ вимірні, $V(x), V_n(x) -$ $m \times m$ вимірні, $V_{n1}(x), U_{n1}(x) - p \times m, m \times p$ відповідно.

Згідно вигляду рівнянь (1), (5), (6) $\Phi(x,\varepsilon)$ формально задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix} \Phi. \qquad (9)$$

Підставляючи (7) в (9) і зрівнюючи коефіцієнти при ε в нульовому степені, одержимо

$$U'(x) = A(x)U(x), \qquad (10)$$

$$U(x)C_0 + V_{11}(x)B(x) = A_1(x)V(x), \qquad (11)$$

$$V(x)D_0 = B_2(x)U(x) + B(x)U_{11}(x), \qquad (12)$$

$$V(x)B(x) = B(x)V(x). \qquad (13)$$

З (11) і (14) одержимо

$$U(x) = \Omega_0^x(A(x)),$$

$$V(x) = q_{0m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \qquad (14)$$

де $\Omega_0^x(A(x)) -$ матрицант рівняння (10), $q_{0i}(x), i = \overline{1,m} -$ довільні голоморфні функції в області (2), $I -$ одинична матриця.

Для визначення $q_{0i}(x), i=\overline{1,m}$ використаємо систему рівнянь, яка одержуються з (7), (9) і зрівнюючи коефіцієнти при першому степені параметра ε :

$$U'_1(x)+V_{11}(x)D_0 = A(x)U_1(x)+A_1(x)U_{11}(x), \qquad (15)$$

$$V'_{11}(x)+U(x)C_1+U_1(x)C_0+V_{21}(x)B(x)=$$

$$=A(x)V_{11}(x)+A_1(x)V_1(x), \qquad (16)$$

$$U'_{11}(x)+V(x)D_1+V_1(x)D_0=$$

$$=B_2(x)U_1(x)+B_1(x)U_{11}(x)+B(x)U_{21}(x), \qquad (17)$$

$$V'(x)+V_1(x)B(x)=B(x)V_1(x)+B_1(x)V(x). \qquad (18)$$

Згідно лем із [2] для існування розв’язку рівняння (18) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$tr((V`(x)-B_1(x)V(x))B^k(x))=0, k=\overline{0,m-1}, \qquad (19)$$

де $B^0(x)=I.$

Підставивши в (19) вигляд $V(x), V'(x)$ з (15) і скориставшись згідно [2], співвідношеннями

$$tr((B^{n-r}(x))'B^k(x))=(n-r)tr(B^{n-r-1+k}(x)B'(x)),$$

одержимо

$$S(x)q'_0(x)=T(x)q_0(x), \qquad (20)$$

де $q_0(x)-m-$вимірний вектор з елементами $q_{0i}(x), i=\overline{1,m},$

$$T(x)=T_1(x)+T_2(x),$$

елементи матриць $T_1(x), T_2(x), S(x)$ визначаються за формулами

$$\{T_1(x)\}_{kr}=-(m-r)tr(B^{m-r-2+k}(x)B'(x)),$$

$$\{T_2(x)\}_{kr}=tr(B_1(x)B^{m-1-r+k}(x)), \qquad (21)$$

$$\{S(x)\}_{kr}=tr(B^{m-r+k-1}(x)),\ \ k=\overline{1,m},\ \ r=\overline{1,m}.$$

Помноживши рівняння (20) зліва на матрицю $D_1(x)$

$$D_1(x)=xI_1+N, \qquad (22)$$

одержимо систему

$$D_1(x)S(x)q'_0(x) = D_1(x)T(x)q_0(x), \qquad (23)$$

в якій матриці $D_1(x)S(x)$ і $D_1(x)T(x)$ при $x \to 0$ мають поведінку

$$D_1(x)S(x) = xK(I + O(x)), \qquad (24)$$

$$D_1(x)T(x) = D_1(0)T(0) + O(x),$$

де $K, D_1(0)T(0) - (m \times m) -$ верхньотрикутні матриці, елементи яких визначаються за формулами

$$\{K\}_{1m} = 0, \{K\}_{jj} = m, \{K\}_{i,m-k+i} = ka_k(0),$$

$$\{D_1(0)T(0)\}_{i,m-k+i} = (k-i)a_k(0) + tr(B_1(0)B^k(0)),$$
$$\{D_1(0)T(0)\}_{jj} = m - j, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,m-1}, k = \overline{1,m-1}.$$

Враховуючи (24), систему (23) перепишемо у вигляді

$$xq'_0(x) = H(x)q_0, \qquad (25)$$

де

$$H(x) = K^{-1}D_1(0)T(0) + O(x). \qquad (26)$$

З (26) і явного вигляду $K^{-1}D_1(0)T(0)$ випливає, що матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i = -\frac{m-i}{m}, i = \overline{1,m}.$ Тоді з [1] випливає, що система (25) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок $q_0(x)$ такий, що $q_{0m}(0) = 1.$ Підставивши знайдені функції $U(x)$ і $V(x)$ в (11), (12) одержимо рівняння для визначення $C_0, D_0, U_{11}(x), V_{11}(x).$ Помноживши (11) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (12) зліва на $B^{m-1}(x)$ одержимо рівняння

$$U(x)C_0B^{m-1}(x) + V_{11}(x)B^m(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \qquad (27)$$

$$B^{m-1}(x)V(x)D_0 = B^{m-1}(x)B_2(x)U(x) + B^m(x)U_{11}(x). \qquad (28)$$

При $x = 0$ із (27), (28) одержимо рівняння для визначення матриць C_0, D_0 :

$$U(0)C_0B^{m-1}(0) = A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \qquad (29)$$

$$B^{m-1}(0)V(0)D_0 = B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \qquad (30)$$

З рівнянь (29), (30) знайдемо:

$\{C_0\}_{i1} = \{A_1(0)V(0)\}_{i1}, \{C_0\}_{ij} = 0, \{D_0\}_{mi} = \{B_2(0)U(0)\}_{mi},$

$\{D_0\}_{si} = 0, i = \overline{1,p}, j = \overline{2,m}, s = \overline{1,m-1}.$

Враховуючи (29), (30) для визначення матриць $V_{11}(x), U_{11}(x)$ з (27), (28) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x) = F(x), \;\; xU_{11}(x) = G(x), \qquad (31)$$

де $F(x), G(x)$ – відомі матриці.

В силу вибору C_0, D_0 маємо $F(0) = 0, G(0) = 0,$ тоді

$$F(x) = x\int_0^1 F'_x(tx)dt, \;\; G(x) = x\int_0^1 G'_x(tx)dt. \qquad (32)$$

З врахуванням (31), (32) для $V_{11}(x), U_{11}(x)$ знайдемо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'_x(tx)dt, \;\; U_{11}(x) = \int_0^1 G'_x(tx)dt, \; (33)$$

які визначають голоморфні в області (2) розв'язки рівнянь (31). Отже знайдені коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовому степені маємо систему рівнянь (15) - (18). Поклавши $U_{11}(0) = 0$ з рівняння (15) однозначно знаходимо $U_1(x)$ а загальний розв'язок рівняння (18) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \qquad (34)$$

$W_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (19). Згідно [2] умови існування розв'язку рівняння, що одержується при прирівнюванні коефіцієнтів при ε у другому степені при підстановкі (7) в (9) має вигляд

$$tr((B_1(x)V_1(x) - V'_1(x) + F_1(x))B^k(x)) \equiv 0, k = \overline{0, m-1}, \qquad (35)$$

де $F_1(x) = B_2(x)V_{11}(x) - U_{11}(x)C_0.$

Підставивши (34) в (35) одержимо систему рівнянь для визначення $q_{1i}(x), i = \overline{1,m}$

$$S(x)q'_1(x) = T(x)q_1(x) + f(x), \qquad (36)$$

де $q_1(x) - m -$ вимірний вектор з компонентами $q_{1i}(x)$,

$\{f(x)\}_i = tr((B_1(x)W_1(x) + F_1(x) - W'_1(x))B^{i-1}(x)), i = \overline{1,m}.$

Помноживши (36) зліва на матрицю $D_1(x)$ маємо

$$xq'_1(x) = H(x)q_1(x) + \widetilde{F}_1(x), \qquad (37)$$

де $\widetilde{F}_1(x)$ згідно (24) при $x \to 0$ має поведінку

$$\widetilde{F}_1(x) = (I + O(x))K^{-1}D_1(x)f(x).$$

Система (37) в області (2) має голоморфний розв'язок $q_1(x)$ такий, що $q_{1i}(0) = 0, i = \overline{1,m}.$ Матриці $V_{21}(x), U_{21}(x), C_1, D_1$ однозначно знаходяться з рівнянь (16), (17). Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при $\varepsilon = 0$ має вигляд $\Phi(x,0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x), V(x)$ визначаються за формулами (14). З умови (4) випливає, що $\det U(x) \equiv 1.$ Згідно вибору розв'язку $q_0(x)$ системи рівнянь (32) маємо $V(0) = 1,$ а значить існує $x_1 \le x_0$ такий, що $\det V(x) \ne 0$ для $|x| \le x_1$. Отже $\det \Phi(x,0) \ne 0$ для $|x| \le x_1$.

Можна довести, що за допомогою заміни $u = V(\varepsilon)w$ система (5), (6) зводиться до вигляду

$$w'_1 = c_1(\varepsilon)v_1, w'_1 = 0, i = \overline{2,p}, \qquad (38)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_1(\varepsilon)w, \qquad (39)$$

де $v = (v_1, \dots v_m) - m -$ вимірний вектор; $c_s = \{C(\varepsilon)\}_{s1}, \quad s = \overline{1,p};$ $V(\varepsilon) - p \times p -$ матриця з діагональними елементами рівними одиниці, в якої $\{V(\varepsilon)\}_{i1} = \dfrac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}, i = \overline{2,p},$ при умові, що $c_1(\varepsilon) \ne 0,$ а інші елементи рівні нулю; $D_1(\varepsilon) = D(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}$. Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай матриці системи рівнянь* (1) *голоморфні в області* (2). *Тоді існують формальні ряди* (7), (8), *коефіцієнти яких голоморфні в області* (2) *такі, що* $\det\Phi(x,0)\neq 0$ *при* $|x|\leq x_1 < x_0$ *і формальне перетворення з матрицею заміни* (7) *приводить систему* (1) *до системи* (38), (39).

ПОСИЛАННЯ

[1] Вазов В.(1968). *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.*-М.:Мир.

[2] Wasow W. (1985). *Linear turning point theory.* - Springer – Verlag New York Ins..

[3] Lee R.Y.(1969)/ On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point .*J. Math. Anal. and Appl.* **27**, 501 – 510.

[4] Hanson R.J.(1966)/ Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point .J. *Math. Anal. And Appl.* **16,** 280 – 301.

[5] Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point. (1974). *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **149,** 3 - 106.

[6] Turritin H.L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation (1950). *Trans. Am: Math. Soc.* **68**, 304 - 329.

[7] Самойленко А.М.(2002) Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. *Укр. мат. журн.* **54**, № 11, 1505- 1516.

[8] Ключник І.Г. (2010). Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту. *Укр. мат. журн.* **62**, № 5, 625 – 642.

УДК 519.53+517.987

НЕПРЕРЫВНО СУММИРУЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВАРИАЦИОННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В. А. РОМАНОВ

Досліджено властивість неперервного підсумовування лінійних операторів в просторах вимірних функцій. Також в термінах цієї властивості отриманий критерій варіаційної неперервності векторної міри.

The property of continuous summation of linear operators in the spaces of measurable functions is investigated. Also a criterion for continuity with respect to variation of vector measure in the terms of this property is established.