ПОСИЛАННЯ

[1] Abdullayev F., Zaderey N., Zaderey P.(2011). On the approximation of analytic functions by Fejer sums of Faber polynomials. *Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" – Sofia,* 13–18.

[2] Савчук В. В. Області Фабера і задача О. І. Степанця. (2002). *Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України.*. 35, 151-163.

[3] Суетин П. К.(1984). *Ряды по многочленам Фабера.* Наука. М.

[4] Стечкин С. Б. (1961). О приближении периодических функций суммами Фейера. *Сборник работ по линейным методам суммирования рядов Фурье: Тр. МИАН СССР, 62, Изд-во АН СССР,* М., 48–60

[5] Фомин Г. А. (1964). О линейных методах суммирования рядов Фурье . *Матем. сб.–* **65(107),** 144-152.

УДК 513

ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

О. П. ЗЕЛЕНЯК

В статье рассматриваются авторские технологии решения геометрических задач. Они разделены на три группы – технологии процесса обучения, технологии процесса решения, технологии изучения конфигураций. Последння группа содержит задачи для применения учащимися межпредметных знаний и элементов исследовательского подхода в обучении.

The author's technologies of solutions of geometrical problems are given in the article. They are divided into three groups – teaching technologies , technologies of the solution process, technologies of the study of configurations. The last group contains the tasks for use by students of interdisciplinary knowledge and the elements of the research approach in teaching.

I. Технології процесу навчання

До першої частини увійшли технології процесу навчання учнів спеціалізованих класів з поглибленим вивченням математики. Розглядається методична система та окремі способи, прийоми розв'язування задач, які застосовуються на уроках геометрії у цих класах.

1. Алгоритмічний підхід

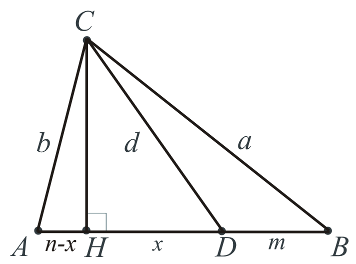
Ефективною методичною системою, яку ми використовуємо на уроках геометрії з 1985 року, є алгоритмічний підхід. Її стрижень – виділення набору задач, які називають базисними, опорними, задачами-теоремами тощо. Це задачі, які часто і ефективно разом з теоремами Піфагора, синусів, косинусів використовуються при розв'язуванні геометричних задач.

Отже, перший набір задач був створений нами раніше, ніж вийшли з друку відомі публікаціїї [1] і [2]. Відпрацьована і апробована система алгоритмічного підходу на основі задач-теорем детально викладена у посібнику [3]. У ньому виділено 25 задач-теорем, на кожну з яких наведено по чотири приклади застосування. *Ми стверджуємо, що знань і умінь застосування задач-теорем набору достатньо для розв'язування планіметричних задач із шкільних підручників, варіантів вступних іспитів та ЗНО, а також більшості олімпіадних задач*. Всі задачі-теореми набору учні десятого класу вивчають напам'ять (зауважимо, що нарешті систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії знайшли своє місце у нових підручниках геометрії для 10 класу). Після цього розгля-даються приклади ефективного застосування задач-теорем, методи допоміжних елементів і т.д.

2. Різниці квадратів похилих та їх проекцій

Теорема. *Різниця квадратів двох похилих, проведених з однієї точки (або з двох точок прямої, паралельної до іншої прямої чи площини), дорівнює різниці квадратів їх проекцій.*

Теорема і можливі наслідки з неї доводяться за допомогою теореми Піфагора [4]. Раціональне застосування вони знаходять у конфігураціях, що містять коло, чевіану (медіану) трикутника, симетричні точки. Останні можна будувати як допоміжні. Окрім спрощення обчислень, при цьому краще розкриваються властивості взаємного розміщення фігур та їх елементів.



Приклад 1. (*Теорема Стюарта*). Точка D належить стороні AB трикутника ABC.

Довести, що $AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot BD$.

Доведення. Проведемо $CH \perp AB$ і позначимо через a, b, c довжини BC, AC і AB сторін трикутника, d – чевіану CD, m і n – відрізки BD і AD.

Потрібно довести, що $a^2n + b^2m - d^2c = mnc$.

Якщо $DH = x$, то проекції похилих a, b, d, проведених із точки C, відповідно дорівнюють $m + x$, $n - x$, x.

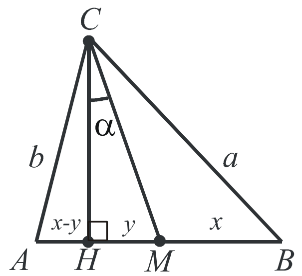
Тоді за теоремою $a^2 - d^2 = (m + x)^2 - x^2 = m^2 + 2mx$ і $b^2 - d^2 = (n - x)^2 - x^2 = - 2nx$.

Помножимо першу рівність на n, а другу на m. $a^2n - d^2n = nm^2 + 2mnx$, $b^2m - d^2m = mn^2 - 2mnx$.

Почленно додамо одержані рівності: $a^2n + b^2m - d^2(m + n) = mn\,(m + n)$.

Теорему доведено, тому що $m + n = c$.

Приклад 2. У трикутнику відомі дві сторони a і b ($a > b$) і площа S. Знайти кут між висотою і медіаною, які проведені до третьої сторони.



Розв’язання. Нехай у $\Delta\, ABC$ CH – висота, CM – медіана, $CB = a$, $CA = b$.

Позначимо шуканий кут HCM через α.

За теоремою $BC^2 - AC^2 = BH^2 - AH^2$.

$a^2 - b^2 = (BH + AH) \cdot (BH - AH) = AB\,(BM + MH - AH) = AB\,(AM - AH + MH) = AB \cdot 2MH = \frac{2S}{CH} \cdot 2MH = 4S\,\frac{MH}{CH} = 4S\,\mathrm{tg}\alpha$. Звідси

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^2 - b^2}{4S}$.

Відповідь: $\mathrm{arctg}\,\frac{a^2 - b^2}{4S}$.

3. Вирази-ребуси

Сучасні педагогічні технології вимагають від учителя пошуку нових форм роботи, спрямованих на підвищення продуктивності уроку, зацікавлення учнів предметом. Складно за обмежений час організувати ефективне повторення вивченого і розв’язування задач. При цьому важливо штучно не відокремлювати ці види роботи. Чи потрібно учням записувати всі розв’язані на уроці задачі? Вважаємо, що ні. Взагалі, і класну дошку потрібно використовувати раціонально. Найважливішою є активна позиція учня на уроці, участь у процесах пошуку та обговорення розв’язувань задач.

Наш практичний досвід виявив ефективність окремих видів роботи на уроці геометрії, один з яких розглянемо як методичний прийом [5].

Йтиметься про короткий запис розв’язку геометричної задачі за допомогою виразу тоді, коли це можливо і методично доцільно. До такої діяльності учнів потрібно готувати, розв’язуючи серії відповідних підготовчих вправ. Перед знаходженням об'ємів пірамід, наприклад, можна повторити, використовуючи проектор, таблицю, вирази, які надруковані на листках або записані на дошці, деякі з наведених нижче вправ (номери вказані за виданням 2001 року підручника О.В. Погорєлова).

№33. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об’єм правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

$$1)\ \frac{1}{3} \bullet \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \bullet \sqrt{b^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}\,; \qquad 2)\ \frac{1}{3} \bullet a^2 \bullet \sqrt{b^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}\,;$$

$$3)\ \frac{1}{3} \bullet 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \bullet \sqrt{b^2-a^2}\,.$$

Примітка: великі знаки множення у наведених виразах відокремлюють структурні елементи формули (сталий множник, площу основи, висоту).

№43. Знайдіть об'єм піраміди, основа якої – трикутник з двома кутами α і β і радіусом описаного кола R. Бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом γ.

$$\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot \sin(180° - (\alpha + \beta)) \bullet R \cdot \mathrm{tg}\gamma.$$

Детальне усне пояснення, наприклад, до останнього виразу може бути таким.

Площа основи піраміди дорівнює півдобутку сторін трикутника на синус кута між ними. Кожна із цих сторін дорівнює добутку діаметра $2R$ описаного кола на синус відповідного протилежного кута α або β, а кут між ними обчислюється за теоремою про суму кутів трикутника і дорівнює $180^{\circ} - (\alpha + \beta)$. Висота піраміди є катетом прямокутного трикутника, гіпотенуза якого – бічне ребро, а інший катет – проекція цього ребра на площину основи. Отже, висота дорівнює добутку радіуса описаного кола R на тангенс кута γ, який бічне ребро піраміди утворює з площиною основи.

Аналогічні пояснення для всіх виразів-ребусів важливо відпрацьовувати з учнями. У процесі "відгадування" складніших використовуємо вказівки трьох рівнів.

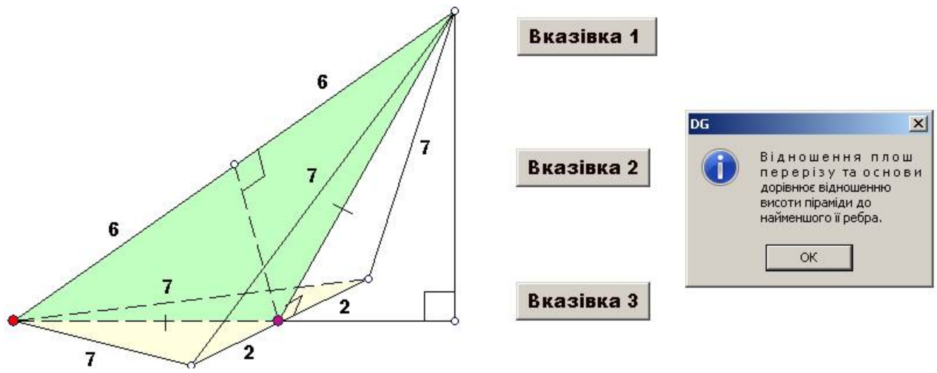
Вказівкою ① може бути *назва ребуса*, вказівкою ② – малюнок або його частина, вказівкою ③ – пояснення, або ж розв'язання задачі. Демонструвати їх ефективніше за допомогою проекційної техніки, електронної дошки, комп'ютера (програмні середовища: DG, GRAN, "Математический конструктор", Geometr's Sketchpad, GeoGebra, Cabri 3D, MS Power Point, Word, Excel; ASDSee тощо). За допомогою цих спеціалізованих середовищ можна додатково виконувати побудови, покроково їх відтворювати, демонструвати вказівки, анімацію тощо.

Наведемо приклад "відгадування" ребусів з демонстрацією вказівок у програмі динамічної геометрії DG і детальними усними поясненнями.

Обчислити об'єм трикутної піраміди, у якої два протилежних ребра дорівнюють 4 і 12, а кожне з інших ребер дорівнює 7.

$$\frac{1}{3} \bullet 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{45-6^2} \text{ або } \frac{1}{3} \bullet 2 \cdot \sqrt{7^2-2^2} \bullet 12 \cdot \frac{\sqrt{45-6^2}}{\sqrt{45}}.$$

①. *Спільний відрізок*. ②. Відношення площ перерізу та основи дорівнює відношенню висоти піраміди до найменшого її ребра. ③. Переріз – рівнобедрений тупокутний трикутник, основа якого дорівнює 12, а квадрат бічної сторони дорівнює 45. *Примітка*: вказівкою перетворювати формулу для учнів є також те, що наведений вираз містить лише один знак $\bullet$.



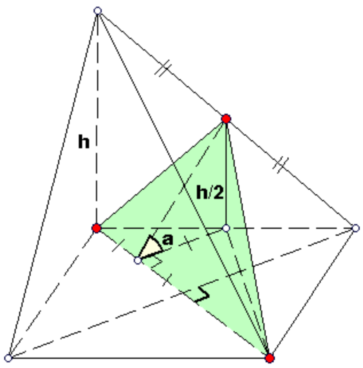
Детальне усне пояснення (до першого виразу). Всі грані піраміди – рівнобедрені трикутники. Переріз її площиною симетрії, яка проходить через середину найменшого ребра та найбільше ребро – тупокутний рівнобедрений трикутник, квадрат бічної сторони якого дорівнює 45 (144 > 45 + 45). Відношення площ перерізу та основи дорівнює відношенню висоти піраміди до найменшого ребра, тому що висота основи піраміди є основою трикутника-перерізу. Звідси висота піраміди дорівнює добутку вказаного ребра на відношення площ, в знаменнику якого площа основи піраміди. Отже, після запису формули для об'єму піраміди і скорочення вираз буде містити площу перерізу, довжину найменшого ребра і коефіцієнт 1/3.

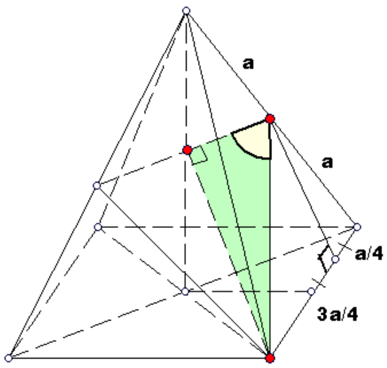
Пропонуємо читачам оцінити складність та діагностичний потенціал стереометричних задач ЗНО минулих років під специфічним "ребусним" кутом.

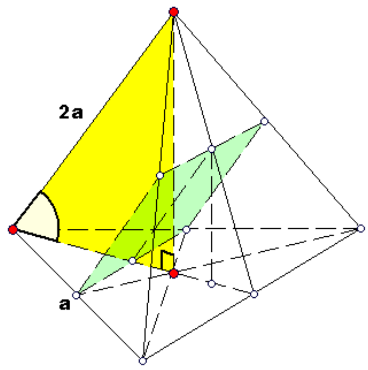
Завдання 37 (ЗНО-2006). Основою чотирикутної піраміди *PABCD* є квадрат *ABCD*. Ребро *BP* перпендикулярне до площини основи піраміди. Точка *K* – середина ребра *PC*. Площина *BKD* утворює з площиною основи піраміди кут α. Знайдіть площу трикутника *BKD*, якщо довжина ребра *BP* дорівнює *h*.

Завдання 36 (ЗНО-2007). У правильній чотирикутній піраміді *SABCD* бічне ребро вдвічі більше сторони основи. Знайдіть кут між медіаною трикутника *SCD,* проведеною з вершини *D,* та середньою лінією трикутника *ASC*, що паралельна основі піраміди.

Завдання 34 (ЗНО-2008). У правильній трикутній піраміді *SABC* бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки *K* і *L* є серединами ребер *AC* і *BC* відповідно. Через пряму *KL,* паралельно до ребра *SC*, проведено площину α. Знайдіть кут між площинами α і *ABC*.







<u>1 спосіб</u>.

$2\cdot\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha \bullet \frac{h/2}{\sin\alpha}$. $\arccos\frac{a\sqrt{2}/4}{\sqrt{a^2-(a/4)^2+(3a/4)^2}}$. $\arccos\frac{a/\sqrt{3}}{2a}$.

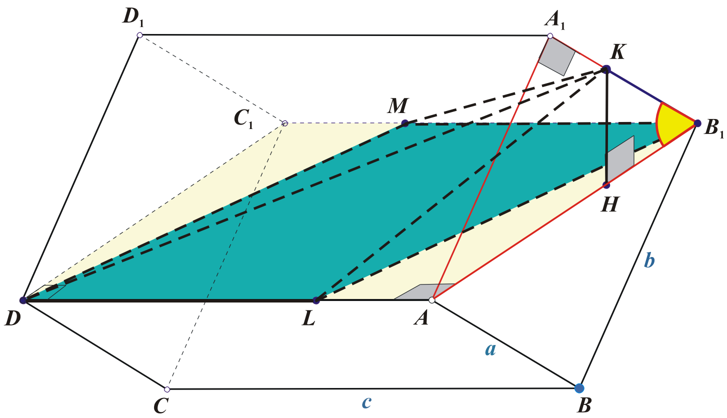
<u>2 спосіб</u>

$\left(2\cdot\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha \bullet \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right):\cos\alpha$. $\arccos\frac{a\sqrt{2}/4}{\sqrt{a^2/2+(2a)^2/2-(2a)^2/4}}$.

$\arccos\frac{\left(1/2-1/6\right)\cdot a\sqrt{3}/2}{a}$.

"Ребус" на завершення кодує розв'язання красивої ***стереометричної*** задачі, яка потребує розвиненої просторової уяви (її розв'язали менше 1% учнів, що складали екзамен ЕГЭ – 2007 [12, с. 28]).

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з бічними ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 його основ вибрано точки L, K, M так, що $AL : LD = 2 : 5$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, $B_1M : MC_1 = 5 : 2$. У скількі разів об'єм паралелепіпеда більший за об'єм піраміди з вершиною K і основою $LDMB_1$?



$$\frac{a\bullet b\bullet c}{\frac{1}{3}\bullet\frac{5}{7}c\cdot\sqrt{a^2+b^2}\bullet\frac{{}^3\!/_5\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot b}.$$

***Відповідь*: 7.**

Сприймання інформації про об'єкт є дискретним, а результат – цілісний образ цього об'єкта. Розглянуті вправи допомагають учням сприймати геометричні об'єкти як цілісні з існуючими залежностями і співвідношеннями між елементами. Окрім того, врахуємо важливість використання обернених задач у процесі навчання і те, що геометрія є джерелом функціональних залежностей та математичних моделей.

Періодична робота учнів з відповідними вправами сприяє розвиткові їх просторової уяви та геометричної мови, формуванню навичок опрацювання формул і підвищенню алгоритмічної культури, швидкому й ефективному повторенню. Вони переконуються в необхідності запам'ятовування формул і властивостей геометричних фігур. При цьому за рахунок наявності елементів гри стимулюється внутрішня емоційно-інтелектуальна зацікавленість до вивчення геометрії. Складання ребусів – чудові вправи і для домашньої роботи. Можна вважати, що учні, які успішно виконують таку роботу, непогано засвоїли шкільний курс геометрії.

II. Технології процесу розв'язування

Технології процесу розв’язування – авторські методи розв’язування геометричних задач, які можуть застосовуватись зацікавленими математикою на гурткових заняттях, при підготовці до олімпіад, при розв’язуванні конкурсних задач тощо.

1. Допоміжне відношення

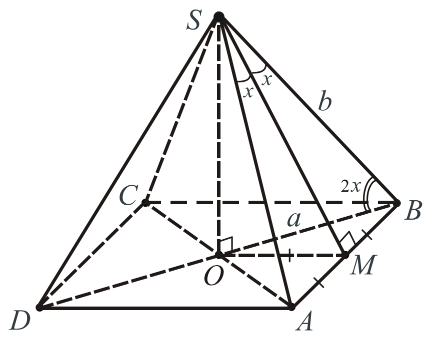
Метод допоміжного відношення можна класифікувати як різновид метода введення допоміжного відрізка. Допоміжними будуть два відрізки, які складають відношення.

Відомо, що тригонометрична функція гострого кута прямокутного трикутника – це відповідне відношення a/b його сторін. Обчисливши це відношення, використовуючи подібність, метод площ, формули для тригонометричних функцій кратних кутів і т.п., ми знайдемо значення тригонометричної функції, а потім і величину кута. Отже, будемо акцентувати увагу на використанні планіметричних властивостей фігур, а не на застосуванні тригонометрії [6].

Приклад 1. Знайти плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо він дорівнює куту між бічним ребром і площиною основи піраміди.

Розв’язання. Нехай у піраміді $SABCD$ SO – висота, SM – апофема, ASB, BSC, DSC, DSA – шукані рівні плоскі кути, SAO, SBO, SCO, SDO – рівні їм (за умовою) і між собою кути нахилу бічних ребер до площини основи.

Введемо два допоміжних відрізки $OB = a$, $SB = b$ і позначимо кут SBO через $2x$. Тоді $\boldsymbol{a/b = \cos 2x}$.



Відношення a/b – допоміжне і шукане.

$OM = MB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \dfrac{MB}{SB} = \dfrac{a}{b\sqrt{2}}$.

Формулою косинуса подвійного аргумента $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ скористаємось як рівнянням зв'язку.

$\dfrac{a}{b} = 1 - 2\dfrac{a^2}{2b^2}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{a}{b} - 1 = 0$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $= \cos 2x$ $(a/b > 0)$. *Відповідь*: $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Сформулюємо можливий **а л г о р и т м** розв'язування подібних задач:

1) *Ввести відношення a/b,* позначивши через a і b довжини двох допоміжних відрізків.

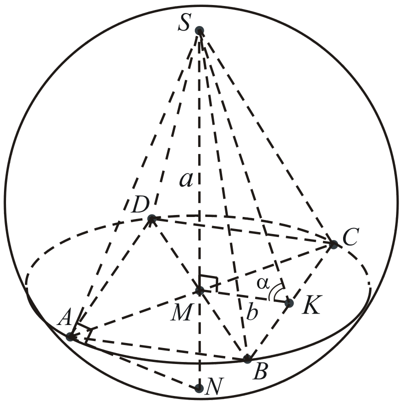
2) *Вибрати тригонометричну функцію,* значення якої від шуканого (даного чи допоміжного) кута дорівнює a/b.

3) *Знайти рівняння зв'язку,* використовуючи співвідношення з умови задачі, формули для тригонометричних функцій кратних кутів, теорему Піфагора, подібність, метод площ і т.п.

4) *Обчислити a/b,* розв'язавши одержане рівняння або *виразити через a/b***,** степені чи члени цього відношення, які містяться у виразі-результаті.

Записати відповідь за допомогою відповідної оберненої тригонометричної функції чи виконуючи відповідні заміни у виразі.

Приклад 2. У сферу вписана правильна чотирикутна піраміда, у якої двогранний кут при основі дорівнює α. Знайти площу основи піраміди, якщо площа сфери дорівнює S.



Розв'язання. Нехай $SABCD$ – дана піраміда, вписана у сферу з діаметром SN, SM – висота піраміди, $M = AC \cap BD$, SK – апофема, SKM – даний кут α.

1. $SM = a$, $KM = b$.
2. $\boldsymbol{a/b = \mathrm{tg}\,\alpha}$.
3. $SA^2 = SM \cdot SN$ – рівняння зв'язку ($\angle SAN = 90^\circ$).
4. $AM = b\sqrt{2}$, $a^2 + 2b^2 = a \cdot 2R$, де R – радіус описаної сфери.

$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$, тому $b^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2b^2 = b\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot 2R$, $b(\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2) = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot 2R$.

$4b^2$ – шукана площа основи. $4b^2 = 4 \cdot \dfrac{4R^2 \cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha}{(2+\mathrm{tg}^2\alpha)^2}$.

За умовою $4R^2 = S/\pi$. *Відповідь*: $\dfrac{4S\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\pi(2+\mathrm{tg}^2\alpha)^2}$.

2. Відновимо симетрію

Метод "відновимо симетрію" – потужний, багатогранний. Його можна застосовувати для аналізу задачі (вивчення вихідних даних, створення малюнку, розгляду кількості випадків), пошуку способів її розв'язування, а також у процесах розв'язування та створення нових геометричних задач.

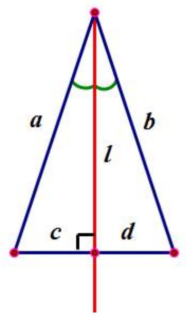
Розглянемо два аспекти цього методу [10, 11].

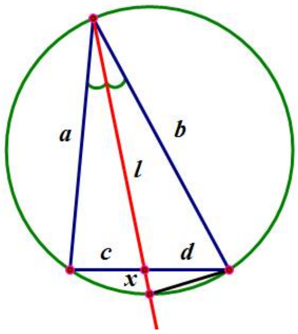
Застосування для пошуку способу розв'язування геометричної задачі – різновид методу, відомого як "розгляд крайнього випадку". Під крайнім випадком розуміється симетрична геометрична конфігурація. Після симетризації малюнка розв'язання багатьох задач стає простим або навіть очевидним. Довільні трикутники конфігурації можуть перетворитися на прямокутні чи рівнобедрені, подібні – на рівні. Але найважливіше те, що в конфігураціях можуть існувати інваріанти. Їх виявлення – ключ до розв'язку задачі. Якщо інваріанти не знайдено, то варто спробувати застосувати загальну теорему (наприклад, теорему косинусів замість теореми Піфагора) чи перевірити на подібність трикутники, які були рівними у симетричному випадку.

Приклад 1. Довести формулу $l^2 = ab - cd$ для квадрата бісектриси кута трикутника.

Доведення. Після симетризації малюнка для рівнобедреного трикутника $l^2 = a^2 - c^2$ за теоремою Піфагора. Рівносильність рівності, що доводиться очевидна тому, що $a = b$ і $c = d$.

Як квадрати a^2 і c^2 "перетворюються" у добутки ab і cd в загальному випадку?





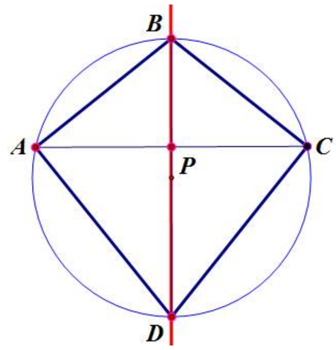
Добуток cd одержимо, після побудови описаного кола. Отже, за властивістю хорд що перетинаються всередині кола $cd = lx$, де x – відрізок, що сполучає точки перетину бісектриси зі стороною трикутника і колом. Рівних трикутників немає. Тепер зрозуміло, що добуток ab може утворитися після розкриття пропорції, одержаної з подібності трикутників, які містять сторони l і $l + x$. Дійсно, $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$ або $l^2 + lx = ab$.

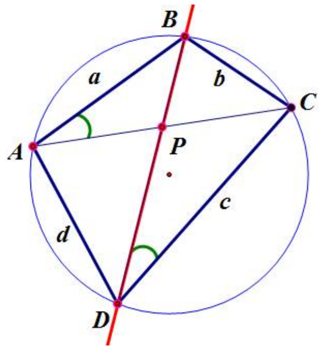
Маємо: $l^2 + cd = ab$, $l^2 = ab - cd$.

Приклад 2. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. $AC \cap BD = P$, P – середина діагоналі AC. Довести, що $2\boldsymbol{BD}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + AD^2 + \boldsymbol{CB}^2 + CD^2$.

Розв'язання. Після симетризації малюнка діагональ BD стане діаметром кола, трикутники ABD, BCD – рівними прямокутними. Залишається двічі застосувати теорему Піфагора і додати рівності.

Тому в загальному випадку застосуємо теорему косинусів у трикутниках *ABD, BCD* і подібність.





Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle C = 180° - \alpha$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

$\boldsymbol{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$ і

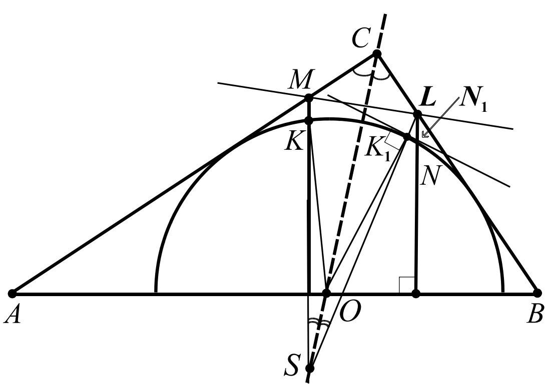
$\boldsymbol{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha)$.

$2\boldsymbol{BD}^2 = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + 2\cos\alpha\,(bc - ad)$, $2\cos\alpha \neq 0$. Впевнитись, що $bc - ad = 0$ можна з подібності пар трикутників *ABP* і *DPC, BPC* і *ADP* .

$\frac{a}{BP} = \frac{c}{CP}$, $\frac{BP}{b} = \frac{AP}{d}$. Перемноживши пропорції і врахувавши умову $AP = PC$, одержимо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Застосування методу у процесі розв'язування задачі чи створенні нової потребує досвіду, геометричної інтуїції, творчого підходу. Як правило, виконуються додаткові побудови відносно осі симетрії (яка в свою чергу також може добудовуватись), розглядаються допоміжне коло, симедіана (пряма, симетрична медіані відносно відповідної бісектриси) і т.п.

Приклад 3 (теорема Д. Мавло, [7-8]). В прямокутний трикутник *ABC* вписане півколо радіуса ρ, яке дотикається до катетів і має центр на гіпотенузі *AB*. Кола з центрами у вершинах *A* і *B* та радіусами, рівними *b* і *a*, перетинаюють його в точках *N* і *K* відповідно. Проведені через точки *N* і *K* перпендикуляри до гіпотенузи перетинаюають катети *BC* і *CA* в точках *L* і *M*. Довести, що $KN \geq ML$.



*Розв'язання.*Звернемо увагу на те, що в рівнобедреному трикутнику *ABC* $KN = ML$, $LN = MK$, $OM = OL$ і т.д.

Нерівність виникає тоді, коли порушується симетрія. Отже, “відновимо” її, розглядаючи симетрію відносно прямої, яка містить бісектрису CO прямого кута.

$MK \cap CO = S$ ($AC > BC$). Точка M симетрична точці L, тому симетричні відрізки SM, SL, їх точки перетину з півколом K, K_1 і радіуси OK, OK_1.

Нехай дотична, перпендикулярна радиусові OK_1, перетинає LN у точці N_1. Точка N_1 не належить півколу, тому не співпадає з точкою N.

Маємо: $MK = LK_1 < LN_1 < LN$. Одержана нерівність $MK < LN$ і рівність $MK = LN$ дають нерівність $MK \leq LN$, рівносильну тій, що доводиться.

III. Технології вивчення конфігурацій

1. Дослідження і застосування властивостей конфігурацій

Раціональні способи розв’язування задачі допомагають знаходити глибоко досліджені, детально вивчені та систематизовані властивості конфігурації. Вважаємо, що у науково-методичному журналі в публікації поважних авторів серед 16 способів розв’язання задачі раціональний так і не наведений саме тому, що конфігурація попередньо не досліджена [13].

Розглянемо одну з важливих конфігурацій – вписано-описану рівнобедрену трапецію.

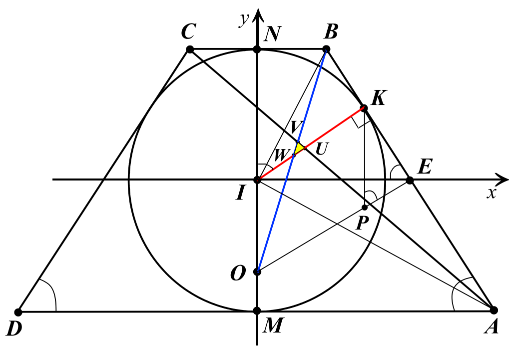
Вона має багато властивостей, які застосовуються при розв’язуванні не лише планіметричних, а й стереометричних задач (зустрічається в осьових перерізах повного і зрізаного конусів, піраміди, тіл обертання, в основах і перерізах многогранників тощо) [9].

Найважливіші властивості: висота такої трапеції дорівнює середній лінії (критерій існування даної конфігурації), $IE = AE = BE$ або $BH = DH$; $2AB = AD + BC$ або $BK = BN$, $AK = AM$; $\angle AIB = 90°$ або $BH^2 = AD \cdot BC$ або $r^2 = ab$; $\Delta EIO \sim \Delta IKE$, звідки $IE^2 = IK \cdot OE$; $OB^2 = OA^2$ або $BN^2 + NO^2 = AM^2 + MO^2$ (позначення див. на мал. нижче).

2. Міжпредметність і дослідницький підхід у вивченні динамічних конфігурацій

При дослідженні конфігурації у динаміці одержуються цікаві задачі. Вони не є традиційними, “хорошо поставленными” і тому вимагають постановки та інтегрованого застосування геометрії, математичного аналізу та інформатики у процесі розв’язування.

Складні конфігурації радимо обов’язково “оживляти”. Моделювати можна у середовищі програмування, електронних таблицях MS Excel. Найраціональніше скористатись спеціалізованими середовищами ”Живая математика” (Geometer’s Sketchpad), GeoGebra, які мають чудові вбудовані засоби анімації.



Трикутник *UVW*. Рівнобічна трапеція *ABCD* (*AD* > *BC*) описана навколо круга з центром *I* і радіусом *IK* ($K \in AB$), площа якого дорівнює *S; O* – центр описаного навколо трапеції кола, $U = AC \cap IK$, $V = AC \cap OB$, $W = OB \cap IK$. Довести, що $\boldsymbol{S_{UVW} < 0{,}01\, S}$.

Доведення. Позначимо гострий кут трапеції α і доведемо, що із його збільшенням від 0° до 90° площа *S*(α) трикутника *UVW* змінюється, досягаючи свого найбільшого значення, яке необхідно обчислити. Щоб “перевести” задачу на мову функцій, застосуємо метод координат.

Нехай *I* (0; 0) – початок координат, *IK* = 1, $IK \perp AB$, $OE \perp AB$, осі абсцис і ординат містять прямі *IE, IO* відповідно. Тоді *S* = π – площа одиничного круга.

Далі, $IE \parallel AD$, $E \in AB$, $\angle IEK = \angle KPE = \alpha$, де $KP \parallel MN$, *OIKP* – паралелограм, *KP* = *IO*.

Маємо $\angle$ *EIK* = 90° – α, точка дотику *K* належить одиничному колу, тому ця точка має координати *K* (cos (90° – α); sin (90° – α)), або *K* (sin α; cos α).

AI, BI – бісектриси кутів *A* і *B* трапеції, тому $\angle$ *MAI* = $\angle$ *BIN* = α/2, *AM* = ctg α/2, *BN* = tg α/2. Звідси *A* ($\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; – 1), *B* ($\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 1), *C* ($\frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}$; 1) (абсциси точок *C* і *B* – протилежні).

Для знаходження від'ємної ординати точки *O* врахуємо, що *OI* = *KP*. З прямокутних трикутників *KPE* і *IKE* отримуємо: *KP* = *KE* / sin α = ctg α / sin α = cos α / sin^2 α. Отже, *O* (0; – $\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$).

Для скорочення подальших записів, позначимо cos α через *c*, sin α через *s*. $s^2 + c^2 = 1$.

Координати шести точок, які визначають три прямі, запишуться так:

I (0; 0), *K* (*s*; *c*), *A* ($\frac{1+c}{s}$; – 1), *C* ($\frac{c-1}{s}$; 1), *O* (0; – $\frac{c}{s}$), *B* ($\frac{1-c}{s}$; 1).

Використовуючи рівняння прямої $y = k\ (x - a) + b$, яка має кутовий коефіцієнт *k* і проходить через точку (*a*; *b*), одержимо рівняння прямих *AC, OB, IK*: $y_{AC} = -\,sx + c$, $y_{OB} = \frac{c+s^2}{s(1-c)}x - \frac{c}{s^2}$, $y_{IK} = \frac{c}{s}$.

Абсциси точок *U, V, W* перетину цих прямих знайдемо з рівнянь $y_{AC} = y_{OB}$, $y_{AC} = y_{IK}$, $y_{IK} = y_{OB}$, а потім, підставляючи абсциси у рівняння прямих, – ординати.

$$U\left(\frac{cs}{c+1-c^2};\frac{c^2}{c+1-c^2}\right),\ V\left(\frac{c(1-c)(2-c^2)}{s(c^3-2c^2+2)};\frac{c^2(2-c)}{c^3-2c^2+2}\right),\ W\left(\frac{c(1-c)}{s};\frac{c^2}{1+c}\right).$$

Нарешті, площу трикутника *UVW* обчислимо через координати його вершин:

$$\mathbf{S_{UVW} = 0{,}5\left|(x_w - x_v)(y_v - y_u) - (x_v - x_u)(y_w - y_v)\right|.}$$

Залишається спростити підмодульний вираз:

$$x_w - x_v = \frac{-c^3(1-c)^2}{s(c^3-2c^2+2)};\ y_v - y_u = \frac{-c^3(1-c)}{(c^3-2c^2+2)(c^2-c-1)};$$

$$x_v - x_u = \frac{c^3(1-c)}{s(c^3-2c^2+2)(c^2-c-1)};\ y_w - y_v = \frac{c^3(c^2-c-1)}{(1+c)(c^3-2c^2+2)};$$

$$\frac{-c^3(1-c)^2}{s(c^3-2c^2+2)} \cdot \frac{-c^3(1-c)}{(c^3-2c^2+2)(c^2-c-1)} - \frac{c^3(1-c)}{s(c^3-2c^2+2)(c^2-c-1)} \cdot \frac{c^3(c^2-c-1)}{(1+c)(c^3-2c^2+2)}$$

$=$

$$= \frac{c^6(1-c)}{s(c^3-2c^2+2)^2}\left(\frac{1-2c+c^2}{c^2-c-1} - \frac{1}{1+c}\right) = \frac{c^6(1-c)}{s(c^3-2c^2+2)(c^3-2c-1)}.$$

Таким чином, $S_{UVW} = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{c^6(c-1)}{s(c^3-2c^2+2)(c^3-2c-1)}\right|$ або

$S_{UVW} = S(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^6\alpha\cdot(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha\cdot(\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha+2)\cdot(\cos^3\alpha-2\cos\alpha-1)}$, де $\alpha \in (0,\pi/2)$.

Знайдемо найбільше значення функції $f(\alpha) = 2S(\alpha)$ на проміжку $(0; \pi/2)$.

Якщо $\alpha \to 0$, то $f(\alpha) \to 0$; якщо $\alpha = \pi/2$, то $\cos \pi/2 = 0$ і $f(\pi/2) = 0$.

Синус і косинус – неперервні функції на всій числовій прямій, тому $f(\alpha)$ на інтервалі $(0; \pi/2)$ є неперервною додатною функцією. Шукане значення існує і досягається всередині проміжка. Дійсно, функція $f(\alpha)$ продовжується за неперервністю на кінці проміжка значеннями $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 0$, існування найбільшого її значення на $[0; \pi/2]$ випливає з теореми Вейєрштрасса.

Знаходження похідної функції $f(\alpha)$ пов’язане з чималими технічними труднощами.

Розглянемо *допоміжну функцію* $g(\alpha) = f(\alpha)\cdot(\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha + 2)$ $= \frac{\cos^6\alpha\cdot(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha\cdot(\cos^3\alpha-2\cos\alpha-1)}$.

Нескладно довести, що $g(\alpha) > f(\alpha)$, $\alpha \in (0,\pi/2)$, тому що $\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha + 2 > 1$.

Маємо $\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 > 0$, $(\cos\alpha - 1)(\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1) > 0$ (обидва множники у добутку є очевидно від'ємними). Таким чином, найбільше значення функції f менше найбільшого значення функції g (проілюструвати це наочно можна за допомогою графіків).

Тепер перейдемо до строгого обчислення найбільшого значення допоміжної функції g.

Диференціюючи і перетворюючи, враховуємо, що $s' = c$, $c' = - s$, $s^2 + c^2 =1$.

$$g'(\alpha) = \left(\frac{c^6\cdot(c-1)}{s(c^3-2c-1)}\right)' = \frac{(c^7-c^6)'\cdot s(c^3-2c-1)-(c^6\cdot(c-1))\cdot(s(c^3-2c-1))'}{s^2(c^3-2c-1)^2} =$$

$$= c^5(c-1)\cdot\frac{3c^5+c^4-13c^3-8c^2+9c+6}{s^2(c^3-2c-1)^2} = c^5\,\frac{3c^5+c^4-13c^3-8c^2+9c+6}{(c+1)(c^3-2c-1)^2}.$$

Для всіх значень α з проміжка $(0, \pi/2)$ виконується $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq -1$, $\cos^3\alpha - 2\cos\alpha - 1 \neq 0$.

Отже, маємо рівняння для знаходження критичної точки функції g:

$((((3\cos\alpha + 1)\cos\alpha - 13)\cos\alpha - 8)\cos\alpha + 9)\cos\alpha + 6 = 0.$ (✱)

Довести, шо це рівняння має лише один корінь на інтервалі $(0; \pi/2)$ можна, наприклад, подавши його у вигляді $f_1 = f_2$ де $f_1 = c^3$, а $f_2 = \dfrac{8c^2-9c-6}{3c^2+c-13}$. Тоді f_1 – монотонно зростаюча функція, а f_2 нескладно досліджується (два екстремуми, горизонтальна асимптота $y = 8/3$ і дві вертикальні асимптоти тощо).

У підсумку, на проміжку $(0; \pi/2)$ графіки цих функцій перетинаються лише один раз.

На відокремленому відрізку, наприклад, [0,3; 0,5] ліва частина рівняння (✱) – неперервна і монотонно зростаюча функція; наближені її значення на кінцях відповідно дорівнюють – 0.818 і 1.105, тобто мають протилежні знаки. Це означає, що за відомою теоремою математичного аналізу рівняння має один корінь на відрізку [0,3; 0,5].

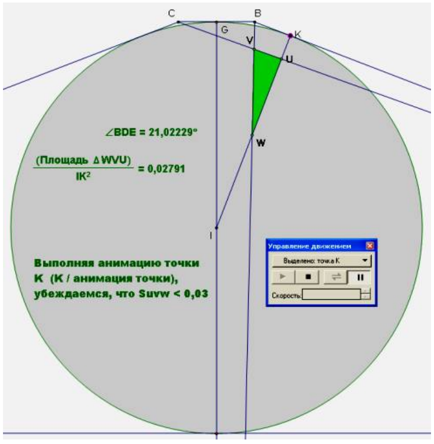
Залишається уточнити його, наприклад, використовуючи середовище програмування і метод половинного поділу.

З точністю $\varepsilon = 10^{-7}$, одержимо $c = \cos\alpha \approx 0{,}9231902$.

$\alpha \approx \arccos 0{,}9231902 \approx 0{,}3944965$, $g(\alpha) \approx 0{,}0600715$.

$S_{UVW} = 0{,}5\ f(\alpha) < 0{,}5\ g(\alpha) < 0{,}5 \cdot 0{,}0600715 = 0{,}03003575 < \pi\ /\ 100 = S\ /\ 100 \approx 0{,}0314159$.

Таким чином, $\boldsymbol{S_{UVW} < 0{,}01\ S}$.



Зображені вище *динамічні моделі трикутника UVW* побудовані у середовищах ”Живая математика” (зліва) та MS Excel.

Можна продовжити аналіз цієї конфігурації: знайти інші способи розв’язання, сформулювати нові задачі, написати моделюючі програми у середовищі програмування, вивчати траєкторії руху, наприклад, вершин трикутника *UVW*, центра його мас, вивчаючи “розщеплення” та “злиття” окремих точок ([14]).

ПОСИЛАННЯ

[1] И.Ф. Шарыгин.(1989). Учимся решать задачи по геометрии . *Математика в школе*. №**2**, 87-101. -№**3,** 95-103.

[2] И.Г. Габович. *Алгоритмический подход к решению геометрических задач*(1989*)*. – К.: Радянська школа.

[3] Зеленяк О.П. (2008).*Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal*. – СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс,.

[4] Зеленяк О.П. (2008). Решение планиметрических задач: общая идея. *Математика в школах України*. №**6** (**198**), 2-9.

[5] Зеленяк О.П. (2009). Розв'язування стереометричних задач: вирази – ребуси. *Математика в школах України.* № **22-24** (**250-252)**, 99-105.

[6] Зеленяк О.П. (2009). Розв'язування стереометричних задач: допоміжне відношення . *Математика в школах України.* №**16-18** (244-246), 59-70.

[7] Мавло Д.П.(2006). Прямоугольный треугольник: вписанная полуокружность и равные (неравные отрезки). *Математика в школах України.* №**30**(**150**), 2-4.

[8] Зеленяк О.П. (2007). Три теоремы, связанные с вписанной в прямоугольный треугольник полуокружностью. *Математика в школах України*. №**4**(**160)**, 3-5.

[9] Зеленяк О.П. (2010). Розв'язування стереометричних задач: спільна конфігурація . *Математика в школах України.* №**4** (**268**), 10-16.

[10] Зеленяк О.П.(2011). Применения симметрии при решении планиметрических задач. *Математика. Все для учителя!* №**11,** 1-11.

[11] Зеленяк О.П.(2011). Применения симметрии при решении планиметрических задач. *Математика. Все для учителя!* №12, 6-11

[12] Денищева Л., Писаревский Б. (2008). Будет ЕГЭ по математике! *Квант.* №**2**, 24-29.

[13] Ігнатенко М.А., Кобко Л.М. (2010). Одна геометрична задача крізь різні розділи . *Математика в школі.* №**12,** 10-14.

[14] В.В. Ковдриш, М.І. Сумарюк.(2010). Розщеплення центра симетрії рівностороннього трикутника. *У світі математики.* **16**, випуск **4**, 5-14.