Коефіцієнт кореляції $\rho = \dfrac{3\alpha p^2}{(p+2)^2}$.

Приклад 3.3. Для копули Фарлі-Гамбеля_1 зі щільністю

$$c(x,y) = 2 - 2x - 2y + 8xy - 6x^2 y - 6xy^2 + 9x^2 y^2$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left(\frac{2(m+3)}{n+1} + \frac{4m}{n+2} + \frac{3m(m+1)}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = 5/12$.

Приклад 3.4. Для копули зі щільністю

$$c(x,y) = 1 + a(1-x)(1-y)(1-3x)(1-3y),\ -0.5 \le a \le 0.5,$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left(\frac{6 + m(5-2a+m)}{n+1} + \frac{8am}{n+2} + \frac{6am}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = 19a/12$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Johnson, M.E.,Chiang Wang and John S. (1984). Generation of continuous multivariate distributions for statistical applications. *American Journal of Mathematical and Management Sciences,* **4,** 225-248.

[2] Nelsen R.B.(2006). *An introduction to copulas*. Springer, New York.

УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАНИХ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

М. В. ГАЄВСЬКИЙ

The estimates of the deviations of analytic functions, which are defined in a bounded domain and which are continuous on its closure, of sums of Valle Poussin are obtained in this paper.

В работе получено оценку для уклонений аналитических в ограниченной области и непрерывных на её замыкании функций от сумм Валле-Пуссена.

Нехай Ω – однозв'язна область в комплексній площині C, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Внаслідок теореми Рімана існує єдине відображення $w=\Phi(z)$, що конформно та однолисно відображає зовнішність області Ω на зовнішність одиничного круга D= $\{w\in X:|w|<1\}$ при умовах

$\Phi(\infty)=\infty,$

$\Phi'(z)=\gamma>0.$

Обернене до $w=\Phi(z)$ відображення позначимо $z=\Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu=0,1,2,\ldots$ [3, с. 52].

Нехай далі $A(\overline{\Omega})$ – множина функцій f, аналітичних в області Ω та неперервних в $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\Gamma$. Коефіцієнти Фабера функції $f\in A(\overline{\Omega})$ обчислюються за формулами [3, с. 107]

$$a_\nu(f)=a_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\zeta, \qquad (1)$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ, а ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu F_\nu(z) \qquad (2)$$

є рядом Фабера функції $f\in A(\overline{\Omega})$.

Введемо такі позначення: $p_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu z^\nu$ – алгебраїчний многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами c_ν; P_n – множина всіх алгебраїчних многочленів $p_n(z)$; $E_n(f)=E_n(f,\overline{\Omega})$ – найкраще рівномірне наближення функції $f\in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними многочленами

$$E_n(f,\overline{\Omega})=\inf_{p_n\in P_n}\|f(z)-p_n(z)\|=\inf_{p_n\in P_n}\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)-p_n(z)|;$$

$$S_n(z)=S_n(f,\overline{\Omega},z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu F_\nu(z)\ -$$

частинна сума ряду Фабера (2) функції $f\in A(\overline{\Omega})$;

$$V_m^n(f,z)=V_m^n(f,\overline{\Omega},z)=\frac{1}{n-m+1}\sum_{\nu=m}^{n}S_\nu(f,z)\ -$$

сума Валле Пуссена ряду Фабера функції $f\in A(\overline{\Omega})$.

Оператор T_Ω задано на множині функцій $f \in A(\overline{\Omega})$ [2, 3, с. 154], і діє він за правилом

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} f(w)\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}dw,$$

де $\mathrm{T} = \{w \in \mathrm{X} : |w| = 1\}$, $z \in \Omega$.

Такий оператор називають оператором Фабера.

Область Ω називають областю Фабера [2], якщо для норми оператора виконується співвідношення:

$$\|T_\Omega\| = \sup_{f \in A(\overline{\Delta}), \|f\|_{A(\overline{\Delta})} \le 1} \|T_\Omega(f)(z)\| < \infty.$$

В [2] отримано критерій області Фабера, зокрема, встановлено таке твердження:

Для того, щоб область Ω *була областю Фабера, необхідно і достатньо, щоб існувала сім'я* $\{\mu_z\}_{z\in\Omega}$, $\mu_z : \mathrm{T} \to \mathrm{C}$ *функцій обмеженої варіації (дійсна та уявна частини є функціями обмеженої варіації) така, що*

$$\sup_{z\in\Omega}\int_{\mathrm{T}} |d\mu_z(\zeta)| < \infty, \tag{3}$$

і для будь-якого $z \in \Omega$

$$\frac{\Psi'(\cdot)}{\Psi(\cdot)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{d\mu_z(\zeta)}{\zeta - \cdot}. \tag{4}$$

З (4) легко отримати наступне представлення для многочленів Фабера

$$F_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} \zeta^\nu d\mu_z(\zeta), \nu = 0,1,2\dots \tag{5}$$

В роботі [4] для сум Валле-Пуссена у просторі періодичних неперевних функцій отримано оцінку

$$\left\|f(z) - V_m^n(f,z)\right\| \le C\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f),$$

в [1] для аналітичних функцій в області Радона і неперервних на її замиканні отримано

$$\left\|f(z) - V_m^n(f,z)\right\| \le C\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f,\overline{\Omega}).$$

Для областей Фабера має місце теорема.

Теорема. *Нехай* Ω *– однозв'язна область Фабера, функція* $f \in A(\overline{\Omega})$. *Тоді*

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| \le C \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f,\overline{\Omega}),$$

де $0 \le m \le n, n = 1,2,\ldots$ та *стала* C *не залежить від* f *та* n.

Тут та далі через C будемо позначати абсолютні сталі, можливо, неоднакові в різних формулах.

Доведення. Нехай $p_n(z)$ – поліном найкращого рівномірного наближення степеня n для функції $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| = \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} (f(z) - \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu F_\nu(z)) =$$

$$= \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} [f(z) - p_m(z) - S_k(f - p_m, \overline{\Omega}, z)] \le$$

$$\le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu (f - p_m) \cdot F_\nu(z) =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)} \int_{|t|=1} \int_{\mathrm{T}} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} [f(\Psi(t)) - p_m(\Psi(t))] \frac{\zeta^\nu}{t^{\nu+1}} dt d\mu_z(\zeta) =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} [f(\Psi(e^{i\varphi})) - p_m(\Psi(e^{i\varphi}))] e^{i\nu(\tau-\varphi)} d\varphi d\mu_z(e^{i\tau}) \le$$

$$\le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{E_m(f,\overline{\Omega})}{4\pi^2(n-m+1)} \int_0^{2\pi} | \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu\varphi} | d\varphi \int_0^{2\pi} | d\mu_z(e^{i\tau}) | .$$

Відомо [6], що

$$\int_0^{2\pi} | \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu\varphi} | d\varphi \le C(n+1), | \alpha_k | \le 1,$$

тоді, врахувавши (3), остаточно матимемо

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| \le C \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f,\overline{\Omega}).$$

Лему доведено.

ПОСИЛАННЯ

[1] Abdullayev F., Zaderey N., Zaderey P.(2011). On the approximation of analytic functions by Fejer sums of Faber polynomials. *Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" – Sofia,* 13–18.

[2] Савчук В. В. Області Фабера і задача О. І. Степанця. (2002). *Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України..* 35, 151-163.

[3] Суетин П. К.(1984). *Ряды по многочленам Фабера.* Наука. М.

[4] Стечкин С. Б. (1961). О приближении периодических функций суммами Фейера. *Сборник работ по линейным методам суммирования рядов Фурье: Тр. МИАН СССР, 62, Изд-во АН СССР,* М., 48–60

[5] Фомин Г. А. (1964). О линейных методах суммирования рядов Фурье . *Матем. сб.–* **65(107),** 144-152.

УДК 513

ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

О. П. ЗЕЛЕНЯК

В статье рассматриваются авторские технологии решения геометрических задач. Они разделены на три группы – технологии процесса обучения, технологии процесса решения, технологии изучения конфигураций. Последння группа содержит задачи для применения учащимися межпредметных знаний и элементов исследовательского подхода в обучении.

The author's technologies of solutions of geometrical problems are given in the article. They are divided into three groups – teaching technologies , technologies of the solution process, technologies of the study of configurations. The last group contains the tasks for use by students of interdisciplinary knowledge and the elements of the research approach in teaching.

I. Технології процесу навчання

До першої частини увійшли технології процесу навчання учнів спеціалізованих класів з поглибленим вивченням математики. Розглядається методична система та окремі способи, прийоми розв'язування задач, які застосовуються на уроках геометрії у цих класах.