двухслойной жидкости со свободной поверхностью. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. **52**, №1, 72-83.

[2] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Нарадовый В.В. (2011). Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. *Динамические системы.*.**1(29)**, №1, 53-68.

[3] O. Avramenko, V. Naradovyy. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom (2012). *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences.* **1**.

[4] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. (2005). Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины. *Прикладная гидромеханика*. **7(79)**, № 1, 80-89.

[5] Селезов И. Т., Авраменко О. В.(2000). Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. **44**, **№2,** 113-122.

УДК 519.21

ПРО ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ КОПУЛ

Ю. І. ВОЛКОВ

Розглянуто приклади ряду двомірних копул; даються алгоритми для побудови розподілів з цими копулами; вводиться поняття середньої лінійної модульної регресії й знайдено відповідні прямі для розглядуваних копул.

We consider a row of two-dimensional copulas, algorithms are given for the construction of distributions with these copulas, the concept of middle linear module regression is entered and corresponding lines are found for examined copulas.

1. Приклади копул та їх генераторів

Двомірною копулою сукупності випадкових величин називається функція розподілу цих величин і така, що її маргінальні розподіли є рівномірними на проміжку [0,1].

Копулам і їх застосуванням приділяється багато уваги, див., наприклад, [1,2].

В роботі вказується ряд сукупностей випадкових величин розподілами яких будуть відомі копули.

Загальна схема, якою користуються для знаходження розподілу заданої сукупності така. *Нехай сукупність* (ξ,η) *рівномірно розподілена в одиничному квадраті* [0,1] [0,1]. *Розглянемо сукупність випадкових величин* (U,V): $U=\xi,\ V=h(\xi,\eta)$ *і таку, що відображення* $u=x$, $v=h(x,y)$ *взаємно однозначне, отже, можна виразити x і y через u та v. Нехай* $y=y(u,v)$. *Тоді функція розподілу сукупності* (U,V) *буде такою*: $C(u,v)=\int\limits_0^u y(t,v)dt$, *а звідси знаходимо щільність* $c(u,v)=\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}$.

Навпаки, якщо задано копулу *C(x,y)* , то для генерування сукупності випадкових величин (ξ,η) з такою копулою потрібно спочатку знайти функцію розподілу величини η за умови $\xi=x$, використовуючи співвідношення $F_{\eta|\xi=x}=\int\limits_0^y c(x,t)dt$, де $c(x,t)=\dfrac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x\partial t}$ щільність копули. Потім з рівняння $F_{\eta|\xi=x}(x,y)=z$ знаходимо $y=y(x,z)$ і тоді *функцією розподілу сукупності* $(\xi,\eta=\mathrm{y}(\xi,\varsigma))$, *де випадкові величини* ξ *та* ς *рівномірно розподілені на проміжку* [0,1], *буде копула C(x,y).* На практиці для отримання значень величин ξ та ς використовується який-небудь генератор випадкових чисел.

Приклад 1.1. *Функцією розподілу сукупності*

$$(\xi, 2\eta\left(1-\alpha(2\xi-1)+\sqrt{(1-\alpha(2\xi-1))^2+4\alpha\eta(2\xi-1)}\right)^{-1}),\ -1<\alpha<1,$$

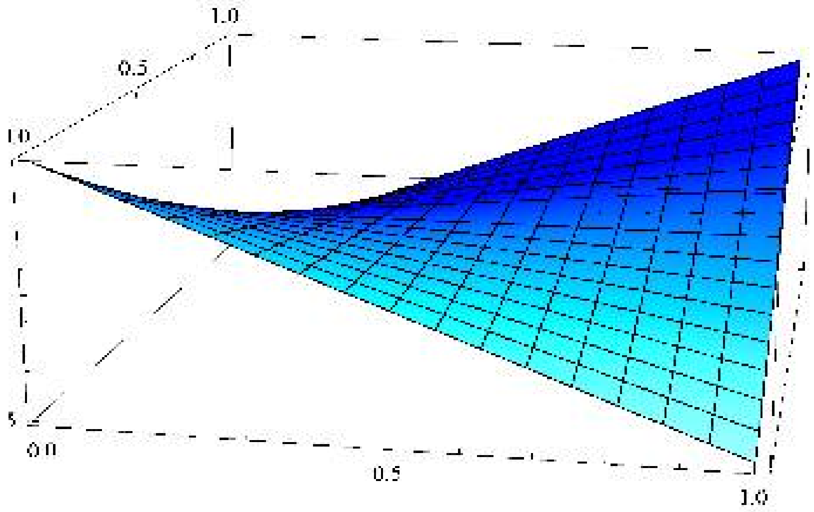
буде копула Моргенштерна (*Morgenstern,s*)

$$C(u,v)=uv(1+\alpha(1-u)(1-v)),\ c(u,v)=1+\alpha(1-2u)(1-2v)). \qquad (1)$$

Справді, розв’язуємо рівняння

$$2y\left(1-\alpha(2u-1)+\sqrt{(1-\alpha(2u-1))^2+4\alpha y(2u-1)}\right)^{-1}=v$$ відносно y.

Матимемо $y(u,v)=\alpha v(1-v)(1-2u)+v$. Звідси отримаємо (1).



Графік щільності копули Моргенштерна (α=0.5)

Приклад 1.2. *Функцією розподілу сукупності*

$$\left(\xi,\ 1-\left(1-\frac{\xi(\xi-2)\eta^2+\sqrt{\xi^2(\xi-2)^2\eta^4+4\eta^2(1-\xi)^2}}{2(1-\xi)^2}\right)^{1/2}\right)$$

буде копула Джоя (Joi,s) $C(u,v)=1-\sqrt{1-uv(u-2)(v-2)}$,

$$c(u,v)=\frac{(1-u)(1-v)(uv(2-u)(2-v)-2))}{(1-uv(2-u)(2-v))^{3/2}} \qquad (2)$$

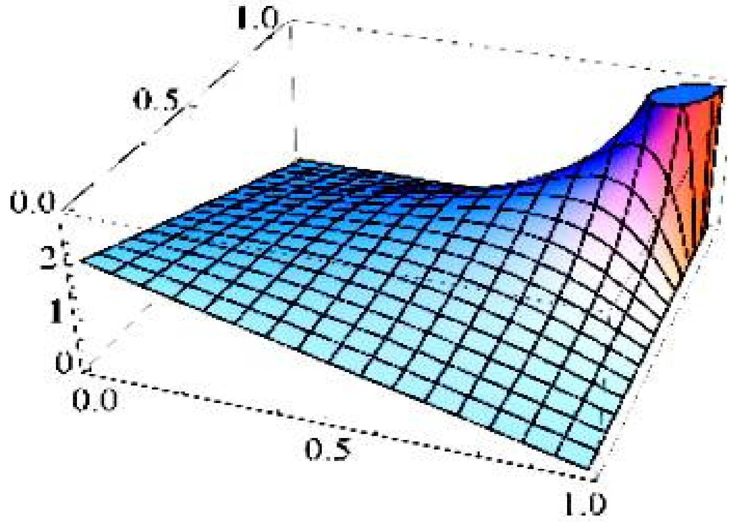
Справді, розв'язуємо рівняння

$$1-\left(1-\frac{u(u-2)y^2+\sqrt{u^2(u-2)^2y^4+4y^2(1-u)^2}}{2(1-u)^2}\right)^{1/2}=v$$

відносно y. Матимемо

$$y(u,v)=\frac{v(1-u)(2-v)}{\sqrt{1-uv(2-u)(2-v)}}.$$

Звідси отримаємо (2).



Графік щільності копули Джоя

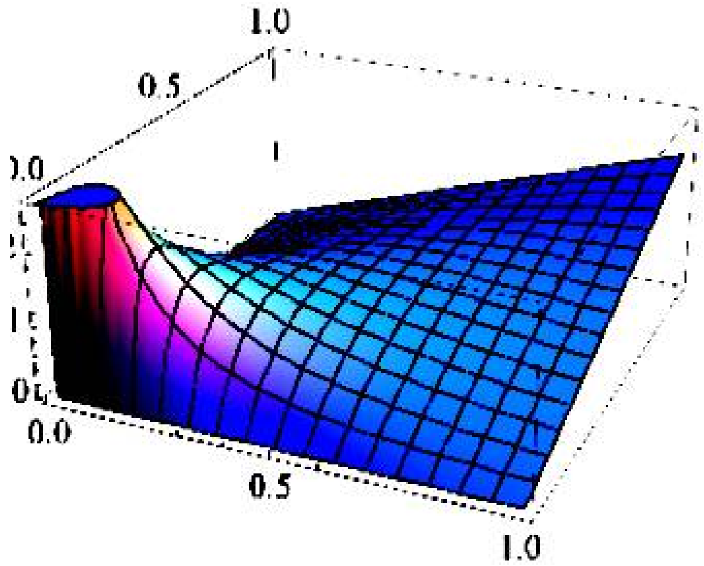
Приклад 1.3. *Функцією розподілу сукупності* $\left(\xi, \dfrac{\xi\sqrt{\eta}}{1-(1-\xi)\sqrt{\eta}}\right)$ *буде*

копула Клайтона (*Clayton,s*) $C(u,v)=\dfrac{uv}{u+v-vv}$, $c(u,v)=\dfrac{2uv}{(u+v-uv)^3}$. (3)

Справді, розв'язуємо рівняння $\left(\dfrac{u\sqrt{y}}{1-(1-u)\sqrt{y}}=v\right)$ відносно y.

Матимемо

$y(u,v)=\dfrac{v^2}{(u+v-uv)^2}$. Звідси отримаємо (3).



Графік щільності копули Клайтона

Приклад 1.4. *Функцією розподілу сукупності*

$$\left(\xi, 1-\exp\left(\frac{1}{\theta}-\frac{W_{-1}(\varsigma)}{\theta\log(1-\xi)-1}\right)\right),\ 0<\theta<1, \varsigma = e^{-1/\theta}(1-\xi)(1-\eta)(\log(1-\xi)-1/\theta)$$

(W_{-1}- *функція Ламберта*) *є копула Гамбеля* (*Humbel,s*)

$$C_\theta(u,v) = u+v-1+(1-u)(1-v)\exp(-\theta\log(1-u)\log(1-v)). \tag{4}$$

Доведення. Розв'язуємо рівняння

$$1-\exp\left(\frac{1}{\theta}-\frac{W_{-1}(e^{-1/\theta}(1-u)(1-y)(\log(1-u)-1/\theta))}{\theta\log(1-u)-1}\right)=v \quad \text{відносно } y.$$

Матимемо

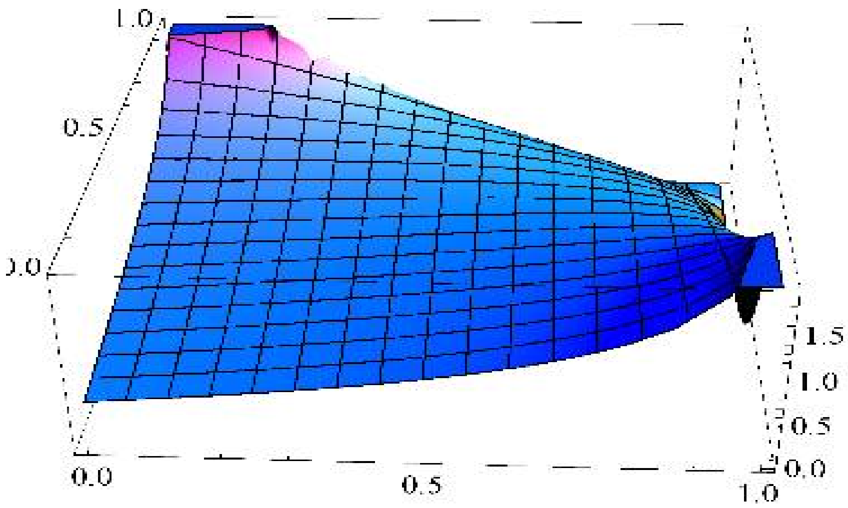
$$W_{-1}(e^{-1/\theta}(1-u)(1-y)(\log(1-u)-1/\theta)) = (\theta\log(1-u)-1)(1/\theta-\log(1-v).$$

Звідси

$y(u,v) = 1+(\theta\log(1-v)-1)(1-v)(1-u)^{-\theta\log(1-v)}$, а тому

$$C(u,v) = \int_0^u y(t,v)dt = u+v-1+(1-u)(1-v)(1-u)^{-\theta\log(1-v)} =$$

$$u+v-1+(1-u)(1-v)\exp(-\theta\log(1-u)\log(1-v)).$$



Графік щільності копули Гамбеля (θ=0.5)

Приклад 1.5. *Функцією розподілу сукупності*

$$\left(\xi, \frac{2\eta(\eta-1)(\xi(\alpha^2-1)-\alpha+1)-\alpha-(2\eta-1)\sqrt{\alpha^2+4(\alpha^2-1)\alpha\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)}}{2(\eta(\eta-1)^2(\alpha-1)^2-\alpha)}\right), \alpha>0,$$

буде копула Плакетта (*Plackett,s*)

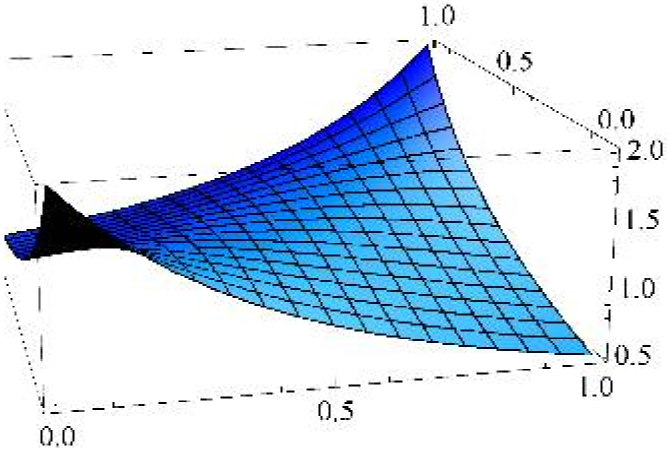
$$C(u,v)=\frac{1}{2(\alpha-1)}\left((\alpha-1)(u+v)+1-\sqrt{((\alpha-1)(u+v)+1)^2-4\alpha(\alpha-1)uv}\right). \quad (5)$$

Справді, розв'язуємо рівняння

$$\frac{2y(y-1)(u(\alpha^2-1)-\alpha+1)-\alpha-(2y-1)\sqrt{\alpha^2+4(\alpha^2-1)\alpha uy(1-u)(1-y)}}{2(y(y-1)^2(\alpha-1)^2-\alpha)}=v$$

відносно y. Матимемо

$y(u,v)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{(\alpha-1)(u+v)+1-2\alpha v}{2\sqrt{((\alpha-1)(u+v)+1)^2-4\alpha(\alpha-1)uv}}$. Звідси отримаємо (5).



Графік щільності копули Плакетта (α=2)

Примітка. З копул можна отримувати так звані копули виживання (survival copulas [1, 1.6.1 p.32]) $\widehat{C}(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v)$, які будуть функціями розподілу сукупностей $(1-\xi,1-\eta)$. Наприклад, для копули Гамбеля копула виживання така: $\widehat{C}_\theta(u,v)=uv\exp(-\theta\log u\log v)$, а для копули Клайтона $\widehat{C}(u,v)=C(u,v)$.

Приклад 1.6. Побудувати сукупність випадкових величин з копулою FGM(2)

$$C(x,y) = xy\left(1 + \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y^2)\right).$$

Для цієї копули щільність $c(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)$,

$$F_{\eta|\xi=x} = \int_0^y c(x,t)dt = \frac{1}{2}((3x^2 - 1)y^3 + 3y(1 - x^2)).$$

З кубічного рівняння $(3x^2 - 1)y^3 + 3y(1 - x^2) - 2z = 0$ (відносно y=$y(x,z)$) знаходимо

$$y = \begin{cases} z, \text{ ÿêùî } \; x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{1}{6\sqrt[3]{2}(3x^2 - 1)}\left(\left((1 + i\sqrt{3}\right)u(x,z) - \dfrac{2(1 - i\sqrt{3})v(x,z)}{u(x,z)}\right), \text{ ÿêùî } \; x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}(3x^2 - 1)}\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}v(x,z)}{u(x,z)} - u(x,z)\right), \text{ ÿêùî } \; x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

де

$$u(x,z) := 3\left(2(3x^2 - 1)^2\left(-z + \sqrt{z^2 + \frac{(1 - x^2)^3}{3x^2 - 1}}\right)\right)^{1/3}, \; v(x,z) := 9(1 - x^2)(3x^2 - 1).$$

Звідси отримуємо шукану сукупність $(\xi, \eta = \mathrm{y}(\xi, \varsigma))$, де випадкові величини ξ та ς рівномірно розподілені на проміжку [0,1].

Приклад 1.7. Побудувати сукупність випадкових величин з копулою FGM(3)

$$C(x,y) = xy\left(1 + \frac{1}{3}(1 - x^3)(1 - y^3)\right).$$

Для цієї копули щільність $c(x,y) = 1 + \frac{1}{3}(1 - 4x^3)(1 - 4y^3)$,

$$F_{\eta|\xi=x}=\int_0^y c(x,t)dt=\frac{1}{3}((4x^3-1)y^4+4y(1-x^3)).$$

З рівняння $(4x^3-1)y^4+4y(1-x^3)-3z=0$ (відносно y) знаходимо

$$y=\begin{cases}\dfrac{v(x,z)}{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{z}{2(u(x,z))^{1/3}}-\dfrac{(u(x,z))^{1/3}}{2(4x^3-1)}+\dfrac{(1-x^3)\sqrt{2}}{(4x^3-1)v(x,z)}\right)^{1/2}, \text{ÿêùî}\quad x\neq\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\\ \text{z, ÿêùî}\quad x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\end{cases}$$

де

$$u(x,z):=-1+6x^3-9x^6+4x^9+((1-4x^3)^2((x^3-1)^4+z^3(4x^3-1))^{1/2},$$

$$v(x,z)=\left(\frac{z-4zx^3+(u(x,z))^{1/3}}{(4x^3-1)(u(x,z))^{1/3}}\right)^{1/2}.$$

Звідси отримуємо шукану сукупність $(\xi,\eta=\mathrm{y}(\xi,\varsigma))$, де випадкові величини ξ та ς рівномірно розподілені на проміжку [0,1].

Приклад 1.8. Побудувати сукупність випадкових величин з копулою $C(x,y)=xy(1+(1-x)(1-y)(1+xy))$. (Копула Фарлі-Гамбеля_1).

Для цієї копули щільність

$$c(x,y)=2-2x-2y+8xy-6x^2y-6xy^2+9x^2y^2,$$

$$F_{\eta|\xi=x}=\int_0^y c(x,t)dt=y^3(3x^2-2x)-y^2(3x^2-4x+1)+2y(1-x)$$

З кубічного рівняння (відносно y)

$$y^3(3x^2-2x)-y^2(3x^2-4x+1)+2y(1-x)-z=0$$

знаходимо

$$y=y(x,z)=\begin{cases}\sqrt{1+3z}-1, \text{ ÿêùî}\quad x=\dfrac{2}{3},\\ u(x,z)+v(x,z)-s(x), \text{ ÿêùî}\quad d(x,y)\geq 0,\\ 2\left(-\dfrac{1}{3}p(x)\right)^{1/2}\arccos\left(-\dfrac{1}{2}q(x,z)\left(-\dfrac{3}{p(x)}\right)^{1/2}\right)-s(x), \text{ ÿêùî}\quad d(x,y)<0\end{cases},$$

де

$$s(x) := \frac{3x^2 - 4x + 1}{3(2x - 3x^2)},\ p(x) := -\frac{9x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 4x + 1}{3x^2(3x-2)^2},$$

$$q(x,z) := \frac{2(9x^3 + 12x^2 - 11x - 1)(3x-1)(x-1)^2}{27x^3(3x-2)^3} + \frac{z}{x(3x-2)},$$

$$d(x,z) := \left(\frac{p(x)}{27}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}q(x,z)\right)^2,$$

$$u(x,z) := \left(-\frac{1}{2}q(x,z) + \sqrt{d(x,z)}\right),\ v(x,z) := -\frac{p(x)}{3u(x,z)}.$$

Звідси отримуємо шукану сукупність $(\xi, \eta = y(\xi, \varsigma))$, де випадкові величини ξ та ς рівномірно розподілені на проміжку $[0,1]$.

2. Лінійна середня модульна регресія

Означення 1. *Пряма $y=ax+b$ називається прямою середньої модульної регресії η на ξ, якщо модульне відхилення $\delta(a,b) := \mathrm{M}|\eta - a\xi - b|$ приймає найменше значення.*

Аналогічно дається означення прямою середньої модульної регресії ξ на η.

Для копул зі щільністю $c(x,y)$

$$\delta(a,b) = \int_0^1\int_0^1 |y - ax - b|\, c(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{ax+b}^1 yc(x,y)dy - a\int_0^1 xdx \int_{ax+b}^1 c(x,y)dy -$$
$$b\int_0^1 dx \int_{ax+b}^1 c(x,y)dy + a\int_0^1 xdx \int_0^{ax+b} c(x,y)dy + b\int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x,y)dy - \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} yc(x,y)dy =$$
$$\int_0^1 dx\left(\int_0^1 yc(x,y)dy + \int_0^{ax+b}(2ax + 2b - 2y)c(x,y)dy - ax - b\right),\ \text{а звідси}$$

$$\delta(a,b) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} - b + \int_0^1 dx \int_0^{ax+b}(2ax + 2b - 2y)c(x,y)dy\ .$$

Для знаходження коефіцієнтів a та b потрібно розв’язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial b} = 0 \end{cases}, \text{ яка для копул буде такою: } \begin{cases} \int_0^1 x dx \int_0^{ax+b} c(x,y) dy = \dfrac{1}{4}, \\ \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x,y) dy = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (6)$$

Тоді $\delta(a,b) = \frac{1}{2} - 2\int_0^1 dx \int_0^{ax+b} yc(x,y)dy.$

Означення 2. *Для сукупності* (ξ, η) *пряма y=ax+b називається медіанною, якщо*

$$\mathrm{P}((\xi,\eta)\,|\,\eta \le a\xi + b) \ge \frac{1}{2},\ \mathrm{P}((\xi,\eta)\,|\,\eta \ge a\xi + b) \ge \frac{1}{2}\ .$$

Через те, що $\int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x,y)dy = \mathrm{P}((\xi,\eta)\,|\,\eta \le a\xi + b)$, то з (6) випливає, що

пряма середньої модульної регресії буде і медіанною прямою.

Приклад 2.1. Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули Моргенштерна

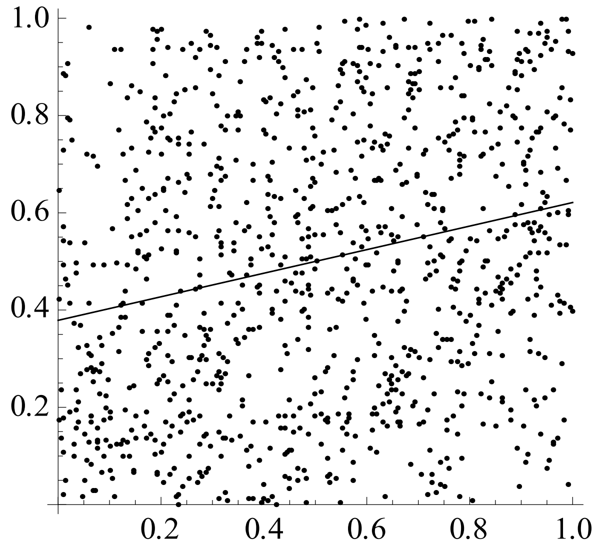
$$c(x,y) = \frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 + \alpha(2x-1)(2y-1)$$

$$\delta(a,b) = \frac{1}{30}(3a^3\alpha + 5a^2(2b\alpha - \alpha + 2) + 5a(2b^2\alpha + 2b(3-\alpha) - 3) + 30b^2 - 30b + 15)$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{30}(9a^2\alpha + 10a(2b\alpha - \alpha + 2) + 5(2b^2\alpha + 2b(3-\alpha) - 3 = 0, \\ \dfrac{1}{3}(a^2\alpha + a(2b\alpha - \alpha + 3) + 6b - 3 = 0 \end{cases}.$$

Звідси $a = \dfrac{-5 + \sqrt{25 + 15\alpha^2}}{3\alpha},\ b = \dfrac{5 + 3\alpha - \sqrt{25 + 15\alpha^2}}{6\alpha}.$



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Моргенштерна (α=1)

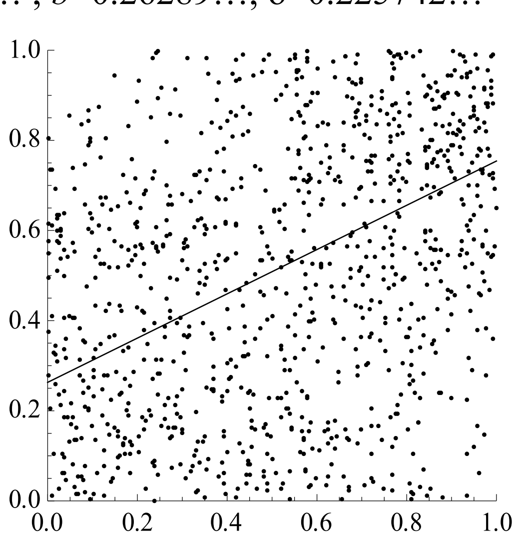
Приклад 2.2. Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули FGM(2) $c(x,y)=1+\frac{1}{2}(1-3x^2)(1-3y^2)$,

$$\delta(a,b)=\frac{1}{140}(8a^4+35a^2b+28a^2(2b^2+1)+35ab(b^2+3)+140b^2)+\frac{1-a}{2}-b.$$

Далі потрібно розв’язати систему

$$\begin{cases} 32a^3+105a^2b+56a(2b^2+1)+35(b^3+3b-2)=0, \\ 5a^3+16a^2b+15a(2b^2+1)+40b-20=0. \end{cases}$$

Звідси a=0.491189… , b=0.26289…, δ=0.225742…



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули FGM(2)

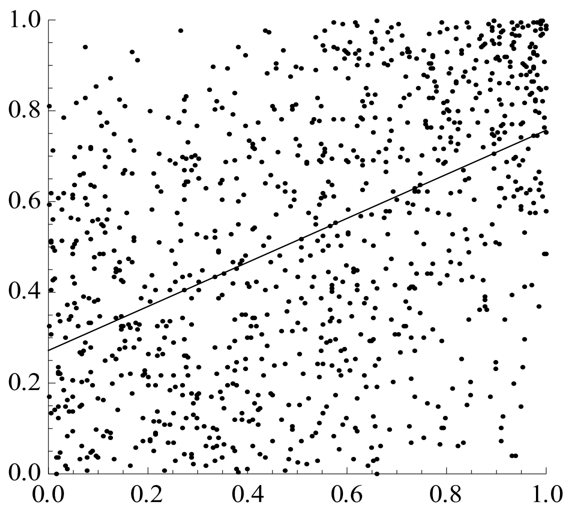
Приклад 2.3. Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули FGM(3) $c(x,y)=1+\frac{1}{3}(1-4x^3)(1-4y^3)$

$$\delta(a,b)=\frac{1}{2}+\frac{a^5}{27}-b+b^2+\frac{a^4b}{5}+\frac{3a^3b^2}{7}+\frac{2}{9}a^2(1+b^3)+\frac{1}{10}a(2b^4+8b-5).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases}\frac{5a^4}{27}+\frac{4a^3b}{5}+\frac{9a^2b^2}{7}+\frac{4}{9}a(1+b^3)+\frac{1}{10}(2b^4+8b-5)=0,\\ -1+2b+\frac{a^4}{5}+\frac{6a^3b}{7}+\frac{4}{3}a^2b^2+\frac{8}{10}a(1+b^3)=0.\end{cases}$$

Звідси a=0.484827…, b=0.271799…, δ=0.227548… .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули FGM(3)

Приклад 2.4. Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули Фарлі-Гамбеля_1.

$$C(x,y)=xy(1+(1-x)(1-y)(1+xy)),$$

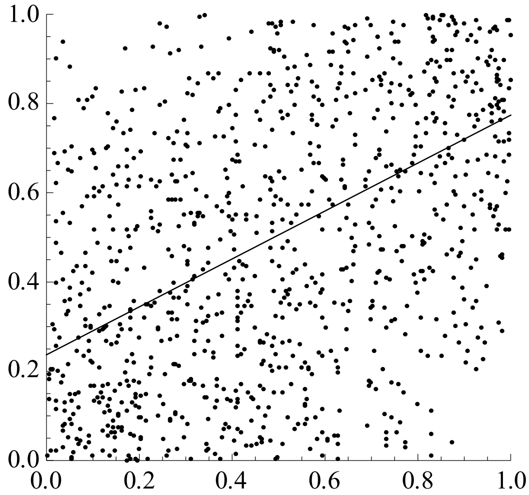
$$c(x,y)=2-2x-2y+8xy-6x^2y-6xy^2+9x^2y^2,$$

$$\delta(a,b)=\frac{1}{210}(10a^4+7a^3(6b+1)+7a^2(9b^2+4b+5)+35a(b^3+b^2+4b-3)+$$
$$210b^2-210b+105).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 40a^3 + 21a^2(6b+1) + 14a(9b^2+4b+5) + 35(b^3+b^2+4b-3) = 0, \\ 6a^3 + 2a^2(9b+2) + 5a(3b^2+2b+4) + 30(2b-1) = 0. \end{cases}$$

Звідси a=0.537047…, b=0.2370066…, δ=0.360855… .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Фарлі-Гамбеля_1

Приклад 2.5. Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули Фарлі-Гамбеля_2.

$$C(x,y) = xy(1 + \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y^2)(1+xy)),$$

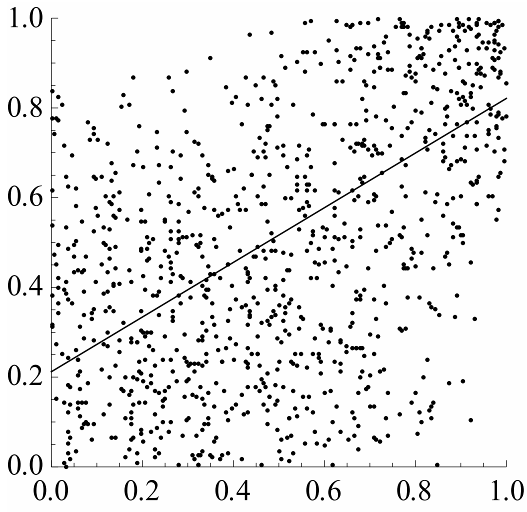
$$c(x,y) = \frac{1}{2}(3 - 3x^2 + 4xy - 8x^3y - 3y^2 + 9x^2y^2 - 8xy^3 + 16x^3y^3),$$

$$\delta(a,b) = \frac{1}{2} + \frac{2}{63}a^5 + a^4\left(\frac{2}{35} + \frac{1}{6}b\right) - b - b^2 + \frac{1}{140}a^3(48b^2 + 35b - 8) +$$
$$\frac{1}{30}a^2(6 - 5b + 12b^2 + 10b^3) + \frac{1}{60}a(8b^4 + 15b^3 - 8b^2 + b - 30).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{10}{63}a^4 + a^3\left(\frac{8}{35} + \frac{2}{3}\right)b + \frac{3}{140}a^2(48b^2 + 35b - 8) + \frac{1}{15}a(10b^3 + 12b^2 - 5b + 6) + \\ \frac{1}{60}(8b^4 + 15b^3 - 8b^2 + b - 30) = 0, \\ -1 + \frac{1}{6}a^4 + a^3\left(\frac{1}{4} + \frac{24}{35}b\right) + 2b + a^2\left(\frac{4}{5}b + b^2 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{60}a(45 - 16b + 45b^2 + 32b^3). \end{cases}$$

Звідси a=0.609218…, b=0.211914…, δ=0.210082… .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Фарлі-Гамбеля_2

Примітка. Розглянуті системи мають по декілька розв'язків. Серед них ми вибираємо дійсний і такий, для якого модульне відхилення найменше.

3. Початкові моменти копул

Для ряду копул можна знайти початкові моменти всіх порядків у замкненому вигляді. Початкові моменти a_{mn} порядку $m+n$ знаходяться за формулами $a_{mn}=\int_0^1\int_0^1 x^m y^n c(x,y)dxdy$, а коефіцієнт кореляції $\rho=12a_{11}-3$.

Приведемо декілька прикладів.

Приклад 3.1. Для копули Моргенштерна зі щільністю

$$c(x,y)=1+a(1-2x)(1-2y),\ -1\le a\le 1,$$

$$a_{mn}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\cdot\left(1+\frac{amn}{m+2(n+2)}\right).$$

Коефіцієнт кореляції $\rho=3a/7$.

Приклад 3.2. Для копули FGM зі щільністю

$$c(x,y)=1+\alpha((1+p)x^p-1)((1+p)y^p-1),\ \text{-}1<\alpha\le\frac{1}{\mathrm{p}},$$

$$a_{mn}=\frac{(1+p)(1+n+p)+m(1+n+p+\alpha np^2)}{(m+1)(n+1)(1+m+p)(1+n+p)}.$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = \dfrac{3\alpha p^2}{(p+2)^2}$.

Приклад 3.3. Для копули Фарлі-Гамбеля_1 зі щільністю

$$c(x,y) = 2 - 2x - 2y + 8xy - 6x^2 y - 6xy^2 + 9x^2 y^2$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left(\frac{2(m+3)}{n+1} + \frac{4m}{n+2} + \frac{3m(m+1)}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = 5/12$.

Приклад 3.4. Для копули зі щільністю

$$c(x,y) = 1 + a(1-x)(1-y)(1-3x)(1-3y), \; -0.5 \le a \le 0.5,$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left(\frac{6 + m(5 - 2a + m)}{n+1} + \frac{8am}{n+2} + \frac{6am}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції $\rho = 19a/12$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Johnson, M.E.,Chiang Wang and John S. (1984). Generation of continuous multivariate distributions for statistical applications. *American Journal of Mathematical and Management Sciences,* **4,** 225-248.

[2] Nelsen R.B.(2006). *An introduction to copulas*. Springer, New York.

УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАНИХ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

М. В. ГАЄВСЬКИЙ

The estimates of the deviations of analytic functions, which are defined in a bounded domain and which are continuous on its closure, of sums of Valle Poussin are obtained in this paper.

В работе получено оценку для уклонений аналитических в ограниченной области и непрерывных на её замыкании функций от сумм Валле-Пуссена.

Нехай Ω – однозв'язна область в комплексній площині C, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Внаслідок теореми Рімана існує єдине