Зауваження. *Довільний гамільтонів розклад графа з будь-якої множини* $R_{4,\theta}$ *є продовженням* [3] *деякого гамільтонового розкладу графа* K_5 *або основного гамільтоново розкладного графа.*

ПОСИЛАННЯ

[1] Донец Г. А., Петренюк А. Я. Экстремальные покрытия графов. Кіровоград, *«Комбінаторні конфігурації»,* 2009.

[2] Харари Ф. *Теория графов.* М., «Мир», 1973.

[3] Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 11-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 15-16 квітня 2011 р., м. Кіровоград, ст. 194-198.

[4] Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 6-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 13-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 13-14 квітня 2012 р., м. Кіровоград.

[5] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов.* М., «Наука», 1990.

[6] Приходькін М. О., Петренюк А. Я. Про чарівну силу графів-мережок, *Матеріали 3-го та 4-го Міжвузівських науково-практичних семінарів «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 19-20 квітня, 18-19 жовтня 2007 р., м. Кіровоград, ст. 71-72.

УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ БАГАТОРЯДНІ КІЛЬЦЯ

Ю. В. ЯРЕМЕНКО

Розглянуто властивості нетерових багаторядних кілець та їх сагайдаків.

There we describe the property of noetherian multiserial rings and their quiver.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Кільце A називається *напівдосконалим,* якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [1].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 1. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли $1 \in A$ розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним* [2], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \ldots, K_n$ (можливо і нульові) такі, що $K_1 + \ldots + K_n$ є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, – нуль або простий модуль.

Напівдосконале кільце A будемо називати *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [2].

Природно, що можна розглядати і n-рядні тільки справа або зліва кільця. Часто, не уточнюючи n, n-рядне кільце називають багаторядним.

Зрозуміло, що при $n = 1$ ми отримуємо напівланцюгові кільця, а при $n = 2$ – бірядні кільця.

Напівланцюгові кільця є напівдосконалими кільцями, над якими всі нерозкладні праві й ліві проективні модулі мають лінійну структуру підмодулів. Ю.А.Дрозд [3] і Уорфільд [4] незалежно один від одного довели, що над кільцем всі скінчено зображувані модулі напівланцюгові тоді і тільки тоді, коли це кільце напівланцюгове. Іншими словами, напівланцюгові кільця є кільцями модульно-обмеженого типу, над якими всі нерозкладні скінченно зображувані модулі – ланцюгові. В.В.Кириченко [5] і Уорфільд [4] незалежно один від одного отримали повну характеристику нетерових з двох сторін напівланцюгових кілець. У роботах В.В.Кириченка отримано, крім того, повну характеристику нетерових лише справа напівланцюгових кілець, спадкових справа та напівспадкових справа напівланцюгових кілець з додатковою умовою, що їх факторкільця по первинному радикалу нетерові справа.

Цей клас кілець має безпосереднє використання в деяких питаннях лінійної алгебри і теорії абелевих груп.

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=$ $=\sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через a_{ij}. Будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [6,с.31].

Теорема 2 [2]**.** *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається *зведеним,* якщо A/R є прямим добутком тіл.

За теоремою Моріти категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями.

Модуль M називається *нетеровим (артиновим)*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний (мінімальний) елемент.

Твердження 1. *Модуль M є нетеровим (артиновим) тоді і лише тоді, коли кожен зростаючий (спадаючий) ланцюжок його підмодулів стабілізується.*

При вивченні кілець широко використовується метод сагайдаків. Поняття сагайдака скінченовимірної алгебри над полем було введене Габріелем у зв'язку з вивченням зображень алгебр, квадрат радикала яких дорівнює нулю. Це поняття, перенесене на напівдосконалі кільця

В.В.Кириченко [5], відіграє важливу роль в структурній теорії напівдосконалих кілець.

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R. $P_1,...,P_S$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A-модулі. Позначимо $P(P_iR)$ – проективне накриття модуля P_iR. Тоді

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}} \qquad \boldsymbol{(i,j = 1, \ldots, s).}$$

Поставимо у відповідність модулям $P_1,...,P_s$ точки $1,...,s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерова справа напівдосконалого кільця A [5].

У роботах [5, 7] вказано вигляд сагайдака і вказано структуру нетерових напівланцюгових кілець.

Там же доведено, що нетерове напівланцюгові кільце розпадається в прямий добуток кілець, сагайдаками яких є цикли і ланцюги.

Теорема 3. Будь-яке нетерове справа зведене напівланцюгове кільце ізоморфне прямому добутку артинових напівланцюгових кілець, кілець типу $H_s(\vartheta)$ і факторкілець типу $H(\vartheta,s,m)$, де ϑ – дискретно нормоване кільце. Навпаки, всі кільця такого виду напівланцюгові і нетерові справа.

Кільце типу $H_s(\vartheta)$ має вигляд $\begin{pmatrix} o & o & \ldots & o \\ м & o & \ldots & o \\ м & м & \ldots & o \\ м & м & \ldots & o \end{pmatrix}$, де M єдиний максимальний ідеал локальної неартинової області головних ідеалів O, а $H'(\vartheta,s,m) = \begin{pmatrix} H_s(\vartheta_1) & X_1 \\ 0 & T_m(Д) \end{pmatrix}$, де $T_m(Д)$ – кільце верхніх трикутних матриць над тілом $Д$, а X - множина всіх прямокутних матриць розміру m на n.

Бірядні кільця є важливим узагальненням напівланцюгових кілець.

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [8] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивного модульного типу. В роботі [9] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця. Багаторядні кільця введені у роботі [2].

Наступні теореми характеризують сагайдаки нетерових бірядних та нетерових багаторядних кілець.

Теорема 4 [5]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця *A:*

(а) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(б) A/R^2 *нерозкладне в прямий добуток кілець;*

(в) сагайдак кільця А зв'язний.

Теорема 5 [10]. *Нехай А – нетерове бірядне кільце. Тоді із кожної точки сагайдака кільця А виходить не більше двох стрілок, в кожну точку сагайдака кільця А входить не більше двох стрілок, причому із однієї точки в другу (можливо й співпадаючу з першою) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, який задовольняє ці умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого являється цей граф.*

Лема 1 [10]. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Теорема 6 [2]. *Нехай А – нетерове n-рядне кільце. Тоді з будь-якої точки сагайдака кільця А виходить не більше n стрілок і в будь-яку точку сагайдака кільця А входить не більше n стрілок, причому з однієї точку в іншу (можливо і вихідною) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, що задавольняє ці умови, то існує n-рядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Теорема 7 [11]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля.*

Теорема 8 [2]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Доведення проведемо для правого випадку. Припустимо, що кільце A не є ланцюговим справа модулем. Тоді в A існують два підмодулі A_1 і A_2 такі, що $M_1 \cap M_2 \neq M_1$ і $M_1 \cap M_2 \neq M_2$. Це означає існування елементів $m_1 \in M_1$ і $m_2 \in M_2$ таких, що $m_2 \notin M_1$, а $m_1 \notin M_2$. Зрозуміло, що цоколь фактор-модуля $(m_1A+m_2A)/(m_1R+m_2R)$ не вільний від квадратів і за теоремою 7 кільце A не дистрибутивне справа, що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Теорема 9[12]. *Напівдосконале кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf-модулем (ланцюговим лівим eAe-модулем).*

Лема 2 [13,с.47]. *Мають місце рівності* $U_ie_j = 0$, $e_jV_i = 0$ *при* $i \neq j$ *і* $U_ie_i = U_i$, $e_iV_i = V_i$ $(i,j = 1,...,n)$.

Теорема 10 [13,с.48]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільце eAe і fAf - нетерові, (артинові) справа, fAf – модуль eAf та eAe – модуль fAe –скінчено-породжені. Навпаки, якщо ці умови виконані для деяких ідемпотентів* $e, f \in A$ *таких, що* $e+f=1$, *то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Нагадаємо, що кільце називається *нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді добутку двох ненульових кілець.

Мінором n-го порядку кільця A називається кільце ендоморфізмів B скінчено–породженого проективного A–модуля, який розкладається в пряму суму n–нерозкладних модулів [14].

Твердження 2. *Нерозкладний зведений мінор другого порядку* $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}$ *багаторядного кільця є бірядним кільцем.*

Д о в е д е н н я. Нехай $1 = e_1 + e_2$ – розклад $1 \in B$ в суму двох локальних ідемпотентів, $B_i = e_iBe_i$, R_i – радикал Джекобсона кільця B_i, $(i = 1,$

2), R – радикал Джекобсона кільця B, $X = e_1Be_2$, $Y = e_2Be_1$. Тоді $R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$.

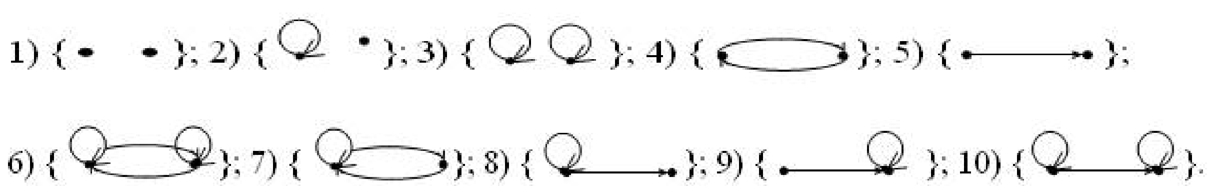
Згідно теореми 2 кільце B багаторядне. Без обмеження загальності можна вважати, що $P_1R=(R_1, X)$ представляється у вигляді суми n ланцюгових B–модулів $K_1, \ldots, K_n$ таких, що $K_i \cap K_j$ прості або дорівнюють нулю ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$). Тоді $P_1Re_1 = K_1e_1 + \ldots + K_ne_1$ і $P_1Re_2 = K_1e_2 + \ldots + K_ne_2$. Тому $P_1Re_1 = R_1$ є сумою ланцюгових B_1-модулів $K_1e_1, \ldots, K_ne_1$. Оскільки за теоремою 9 і R_1 – ланцюговий B_1-модуль, можна вважати, що $R_1 = K_1e_1$. Точно также $X = K_2e_2$. Тому $P_1R = (R_1, X) = K_1 + K_2$, значить, P_1 – бірядний модуль. Аналогічно твердження доводиться для інших головних модулів.

Лема 3. *Нехай R – радикал Джекобсона локального кільця $\mathcal{O}$, X – ланцюговий $\mathcal{O}$-модуль і включення $XR \subset X$ строге. Тоді X – циклічний $\mathcal{O}$-модуль.*

Д о в е д е н н я. З того, що X / XR є векторним простором над тілом $\mathcal{O}/R$, а X–ланцюговий $\mathcal{O}$-модуль, відразу випливає, що XR – максимальний підмодуль в X. Нехай $X \in X / XR$. Підмодуль $X\mathcal{O}$, очевидно, строго містить XR, звідки $X = x\mathcal{O}$.

Розглянемо зведені мінори другого порядку B нетерових справа багаторядних кілець. Відомо, що кільця B_1 і B_2 є або однорядними кільцями Кете (ланцюговими артиновими кільцями), або дискретно нормованими кільцями, взагалі кажучи, некомутативними (локальними областями головних правих і головних лівих ідеалів).

Випишемо всі можливі сагайдаки кільця B з точністю до перенумерації вершин:

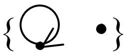


Розглянемо кільце B. Тоді $R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + XY & R_1X + XR_2 \\ YR_1 + R_2Y & R_2^2 + YX \end{pmatrix}$.

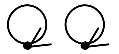
Кільце B напівдистрибутивне, тому X – ланцюговий скінченопороджений B_2-модуль і ланцюговий скінченопороджений лівий B_1-модуль, а Y – ланцюговий скінченопороджений B_1-модуль і ланцюговий скінченопороджений лівий B_2-модуль.

Випадок 1. $Q(B) = \{\bullet \quad \bullet\}$.

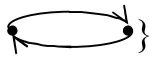
За лемою 2 $P_i = e_iB$ – прості модулі, звідки B – напівпросте артинове кільце.

Випадок 2. $Q(B) = \{$  $\}$.

З тверджень, сформульованих вище, маємо $XY \subset R_1^2$, $X = R_1X + XR_2$, P_2 – простий B-модуль, тобто $Y = 0$ і $R_2 = 0$. Тому $B_2 = D$ – тіло. За лемою Накаями $X = R_1X$, тому $B_1 = O_1$ – дискретно нормоване кільце. Неважко бачити, що у цьому випадку кільце $B = \begin{pmatrix} O_1 & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, де D – тіло часток кільця O_1. Отримали нетерове тільки справа і спадкове тільки справа напівланцюгове кільце.

Випадок 3. $Q(B) = \{$  $\}$.

Згідно теореми 6.1 з [7] таке кільце не може бути напівланцюговим. Маємо $XY \subset R_1^2$; $YX \subset R_2^2$; $X{=}R_1X$; $Y{=}R_2Y$. Якщо $XY{\neq}0$, то $XY = R_1^m = R_1XY = R_1^{m+1}$, звідки $R_1 = 0$, чого не може бути згідно леми 2. Тому $XY = 0$ і $YX = 0$. Без обмеження загальності можна вважати, що модуль P_1 неланцюговий. У цьому випадку $X \neq 0$ і $R_1X = X$ – простий B-модуль. Тому цоколь кільця B відмінний від нуля.

Випадок 4. $Q(B) = \{$  $\}$.

Маємо строге включення $R_1X \subset X$, звідки за теоремою 9 і лемою 3 X – лівий циклічний B_1-модуль. Аналогічно доводиться, що Y – лівий циклічний

B_2-модуль, звідки за теоремою 10 кільце B нетерове зліва. В силу [5] у цьому випадку B – нетерове з двох сторін напівланцюгове кільце. Якщо цоколь кільця B дорівнює нулю, то це кільце ізоморфне кільцю $H_2(\mathrm{O}) = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, де O – дискретно нормоване кільце з єдиним максимальним ідеалом M. Це спадкове первинне кільце.

Випадок 5. $Q(B) = \{ \bullet \longrightarrow \bullet \}$.

Маємо $Y = 0$, $R_2 = 0$, $YX = R_1 = 0$. Легко бачити, що в цьому випадку кільце B ізоморфне кільцю $T_2(D)$ верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом D. Кільце $T_2(D)$ – це артинове спадкове напівланцюгове кільце.

Випадок 6. $Q(B) = \{$
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$
$\}$.

Як і вище, за теоремою 9 і лемою 3 отримуємо, що B – нетерове з двох сторін кільце.

У цьому випадку маємо такий список бірядних кілець:

a) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

b) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y$ – простий B-модуль;

c) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, YX – простий B-модуль, $YR_1 = R_2Y = 0$;

d) XY – простий B-модуль, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

e) XY – простий B-модуль, $R_1X=XR_2=0$, YX–простий B-модуль, $YR_1=R_2Y=0$;

f) $XY = 0$, $R_1X = XR_2$ – простий B-модуль, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

g) $XY = 0$, $R_1X = XR_2$ – простий B-модуль, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y$ – простий B-модуль.

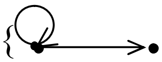
Відмітимо, що цоколь будь-якого кільця B у випадку 6 відмінний від нуля.

Випадок 7. $Q(B) = \{$
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$
$\}$.

Знову кільце B нетерове з двох сторін. Маємо $XY \subset R_1^2$; $YX = R_2$. $XR_1 = R_2X$ і $YR_1 = R_2Y$. Якщо $XY \neq 0$, то $XY = R_1^m$, де $m \geq 2$, звідки

$XYX = XR_2 = R_1^m X = XR_2^m$. Тому $XR_2=0$. Значить, $R_1X=0$. Розглянемо $YXY = R_2Y = YR_1 = YR_1^m$; маємо $YR_1 = R_2Y = 0$. Якщо ж $XY = 0$, то знову $XR_2 = XR_1 = 0$ і $YR_1 = R_2Y = 0$. Отже, завжди $XR_2 = R_1X = 0$ і $YR_1 = R_2Y = 0$, XY або рівний нулю, або є простим B-модулем.

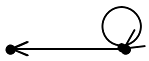
У випадку 7 цоколь кільця B також відмінний від нуля.

Випадок 8. $Q(B)$ = {  }.

Тут P_2 – простий модуль. Тому $Y = 0$, $R_2 = 0$. X – циклічний лівий B_1–модуль, звідки B нетерове з двох сторін. Отже, $R_1 \neq 0$, $R_2=0$, $XR_2=R_1X=0$. В цьому випадку цоколь кільця B також відмінний від нуля.

Випадок 9. $Q(B)$ = {  }.

За теоремою 2.3 [12] лівий сагайдак кільця B має вигляд:

$Q'(B)$ = {  }. Тому модуль Q_1 простий, звідки $Y = 0$ і $R_1 = 0$. Як і вище, отримаємо, що B нетерове з двох сторін і $XR_2 = R_1X = 0$, $R_2 \neq 0$. Знову цоколь кільця B відмінний від нуля.

Випадок 10. $Q(B)$ = {  }.

Маємо $R_1X = XR_2$. Якщо $Y \neq 0$, то $Y = R_2Y$ – простий B-модуль і $YX = 0$. Цоколь кільця B відмінний від нуля.

Наслідок 1. *Нерозкладне зведене нетерове справа бірядне кільця з нульовим цоколем, одиниця якого розкладається в суму двох локальних ідемпотентів, ізоморфне кільцю H_2(O), тобто є нетеровим з двох сторін спадковим первинним напівланцюговим кільцем.*

Наслідок 2. *Нерозкладне спадкове з двох сторін зведене бірядне кільце, одиниця якого розкладається в суму двох локальних ідемпотентів, ізоморфне або кільцю H_2(O), або кільцю $T_2(D)$.*

Аналогічно описані мінори 3-го порядку нетерових бірядних кілець [15], [16] та багаторядних кілець.

ПОСИЛАННЯ

[1] Nakayama T. (1941). On Frobeniusen algebras II. *Ann. of Math.* **42**, № 1, 1-22.

[2] Кириченко В.В., Яременко Ю.В. (1996). Многорядные кольца. *Укр. мат. журнал.* **48**, № 9, 1223-1235.

[3] Дрозд Ю.А. (1975). Об обобщенно однорядных кольцах. *Мат. заметки,* **18**, №5, 705-710.

[4] Warfield R.B. (1975). Serial rings and finitely presented modules. *J. Algebra*. **37**, № 2, 187-222.

[5] Кириченко В.В. (1976). Обобщенно однорядные кольца. *Мат. сб.* **99**, № 4, 559-581.

[6] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. (1980). *Конечномерные алгебры.* – К.: Вища школа

[7] Кириченко В.В. (1975). Обобщенно однорядные кольца. *Препр. АН Украины (75.1).* – К.: Ин-т математики

[8] Fuller K.R. (1977). Weakly symmetric rings of distributive module type. *Comm. in Algebra*. **5,** 997-1008.

[9] Кириченко В.В., Костюкевич П.П. (1986). Бирядные кольца. *Укр. мат. журнал*. **38**, № 6, 718-723.

[10] Кириченко В.В., Яременко Ю.В. (1988). Нетеровы бирядные кольца. *Укр. мат. журнал.* **40**, №4, 435-440.

[11] Camillo V.P. Сб.Distributive modules. *J.Algebra*. **36**, № 1, 16-25.

[12] Кириченко В.В., Хибина М.А. (1993). Полусовершенные полудистрибутивные кольца. *Сб. «Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры».* – К.: Ин-т математики

[13] Кириченко В.В. (1981). Кольца и модули. – К: Из-во Киев. ун-та

[14] Drozd Yu. A. (1971). Minors and reduction theorems. *Coll Math. Soc. J. Bolyai*. **6**, 173-176.

[15] Яременко Ю.В. (1998). Мінори нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу. *Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки.* **2**, 159-168.

[16] Яременко Ю.В. (2002). Мінори нетерових бірядних кілець. *Наукові записки КДПУ. Фізико-математичні науки*. **43**, 83-90.