[3]. Albeverio ,S.,Goncharenko. Y.,Pratsiovyti, M .,Torbin, G., (2007).Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Oper. Stochastic Equations,* .**15**,№1. P.89-97.

[4]. Jessen ,B., Wintner, A. (1935).Distribution function and Riemann Zeta-function, *Trans. Amer. Math. Soc.*38, 48-88.

[5] .Kakutani,S.(1948). Equivalence of inonite product measures, *Ann. of Math.,* 49,214-224.

[6]. Lvy,P.(1931). Sur les sries don't les termes sont des variables independantes, *Studia math.* 3 .,119-155.

УДК 519.53+517.987

МЕРЫ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ БАЗИСНОСТИ

В.О. РОМАНОВ

Доведено, що для кожної міри-добутку із властивістю базисності в нескінченно вимір-ному сепарабельному гільбертовому просторі існує її розкладання на довільне число взаємно сингулярних компонент, які теж є мірами-добутками із властивістю базисності.

It is proved that for every product-measure with basis property in infinite-dimensional separable Hilbert space there exists its distribution on any number mutually singular components that also are the product-measures with basis property.

1. Введение. Известно [1 -3], что среди всех классов мер в гильбертовом пространстве наибольшее число применений к различным задачам бесконечномерного анализа и теории случайных процессов находят меры-произведения, в том числе гауссовские [4], квазиинвариантные [5], дифференцируемые [6] и непрерывные [7] . Также известно [8-9], что в задачах теории бесконечномерных распределений бывает весьма полезным переход от рассмотрения функций множества к изучению функций точки. Поскольку осуществить такой переход помогает наличие мер со свойством базисности [10], то представляет интерес исследование мер-произведений, имеющих указанное свойство. Под базисным разбиением базисной меры понимаем ее разложение в сумму конечного или счетного числа взаимно сингулярных мер, также имеющих свойство базисности. В работах [11], [12] было установлено, что каждые две гауссовские меры в гильбертовом пространстве всегда либо эквивалентны, либо взаимно сингулярны. В связи с этим представляет интерес вопрос о том, можно ли получить базисное разбиение, имея вначале только одну невырожденную гауссовскую меру, или, в более общей постановке, только одну меру-произведение со свойством базисности.

2. Постановка задачи. Пусть X - бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Под *мерами* в пространстве X понимаем вполне конечные счетно-аддитивные функции множества, определенные на сигма-алгебре его борелевских подмножеств и принимающие неотрицательные значения. Под *вероятностной мерой-произведением* относительно полной ортонормированной системы векторов пространства X понимаем такую вероятностную меру, что ее проекция на линейную оболочку любого конечного числа векторов этой системы равна произведению соответствующих одномерных проекций. *Вполне конечную меру-произведение* можно получить из вероятностной меры-произведения с помощью умножения на положительную константу. Заметим, что класс вероятностных мер-произведений включает в себя класс гауссовских мер.

Определение 1. Под *разбиением меры* понимаем ее разложение в сумму конечного или счетного числа нетривиальных взаимно сингулярных мер.

Определение 2. Меру M в пространстве X называем *базисной (имеющей свойство базисности)*, если для каждого банахова пространства У и каждой векторной меры Ф конечной полной вариации, определенной на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающей значения в пространстве У, векторную меру Ф можно задать как предел некоторой слабо сходящейся последовательности векторных мер, имеющих M своим базисом, то есть представимых как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру M.

Замечание 1. В работе [10] было доказано, что для базисности меры необходимо и достаточно, чтобы ни на одном непустом открытом множестве она не принимала нулевого значения. Отсюда следует, что каждая невырожденная гауссовская мера имеет свойство базисности.

Замечание 2. Наличие мер со свойством базисности полезно в том отношении, что позволяет переходить от рассмотрения функций множества (в том числе с векторными значениями) к изучению их аппроксимирующих плотностей, представляющих собой функции точки.

Определение 3. Разбиение меры M в сумму взаимно сингулярных мер $M_к$ называется *базисным*, если все его компоненты $M_к$ имеют свойство базисности.

Цель статьи состоит в доказательстве существования базисных разбиений для имеющих свойство базисности мер-произведений.

3. Результаты работы.

Лемма 1. *Пусть для вполне конечной неотрицательной меры M, определенной на сигма-алгебре борелевских подмножеств конечномерного евклидова пространства L , существует такой вектор e_1 , что на всех перпендикулярных ему гиперплоскостях мера принимает нулевое значение, а также существует такое открытое множество G , что на каждом его непустом открытом подмножестве мера принимает положительное значение. Тогда G можно разбить на два таких дизъюнктных измеримых множества A и B , что на их пересечениях с каждым непустым открытым подмножеством множества G мера тоже принимает положительные значения.*

Доказательство. Без уменьшения общности можно считать, что M(G)=1.

Зафиксируем теперь в пространстве L такую декартову систему координат, для которой вектор e_1 задает первую ось. Под *брусами* в пространстве L будем понимать такие прямоугольные параллелепипеды, размерность которых равна размерности пространства L и все ребра которых параллельны координатным осям.

Для каждого бруса те его грани, которые ортогональны вектору e_1, имеют нулевую меру. Поэтому при фиксировании центра бруса его мера будет непрерывно зависеть от длины того ребра, которое параллельно вектору e_1, а потому (по теореме Больцано-Коши) может принимать все свои промежуточные значения.

Пусть (d_n) - сходящаяся к нулю убывающая последовательность положительных чисел, (h_n) - последовательность точек множества G, плотная в этом множестве.

Существует содержащийся в G брус P_1 с центром в точке h_1, мера которого меньше ¼ , а диаметр меньше d_1.

Пусть к(2) - наименьший из номеров, для которых h_k не принадлежит брусу P_1.

Существует содержащийся в G брус P_2 с центром в точке $h_{k(2)}$, дизъюнктный с брусом P_1, диаметр которого снова меньше d_1, а мера меньше 1/8 .

Пусть к(3) - наименьший из номеров, для которых h_k не принадлежит ни одному из первых двух брусов.

Существует содержащийся в G брус P_3 с центром в точке $h_{k(3)}$, дизъюнктный с первыми двумя построенными брусами, диаметр которого снова меньше d_1, а мера меньше 1/16 .

Продолжая этот процесс, получим последовательность таких содержащихся в G дизъюнктных брусов P_n диаметра меньше d_1, сумма мер которых меньше 1 и объединение которых содержит плотную в G последовательность точек, а потому само плотно в G.

Назовем P_n *брусами 1-го ранга.* Обозначим сумму их мер через s_1. Обозначим также $b_1=1 - s_1$. Ясно, что число b_1 больше нуля и меньше 1.

При выбрасывании из G всех брусов 1-го ранга остается нигде не плотное множество, которое обозначим через A_1. Ясно, что

$M(A_1) = b_1$.

Зафиксируем теперь суммируемую последовательность положительных чисел b_n , первый элемент b_1 которой уже определен. Обозначим

$S_n = 1 - b_n$.

В каждый брус P_n 1-го ранга поместим вначале конечное число дизъюнктных брусов диаметра меньше d_2 , сумма мер которых равна величине $s_2 M (P_n)/2$, затем в оставшиеся пустоты таким образом поместим

еще некоторое число дизъюнктных брусов (с аналогичным ограничением на диаметры) , чтобы сумма мер возросла до величины $2s_2 M (P_n) /3$, затем так продолжим помещать брусы следующих серий, чтобы после размещения брусов к-той серии сумма мер возросла до величины

$k s_2 M (P_n) /k+1$.

В результате в брус P_n 1-го ранга будет помещена счетная последовательность дизъюнктных брусов (назовем их *брусами 2-го ранга),* сумма мер которых равна величине $s_2 M (P_n)$.

Размещая каждую новую серию брусов так, чтобы их центры равномерно распределялись в пустотах, оставшихся после размещения брусов предыдущих серий, можно добиться того, чтобы объединение брусов 2-го ранга, помещенных в брус P_n 1-го ранга, было плотным в нем. Тогда при выбрасывании из бруса P_n 1-го ранга всех помещенных в нем брусов 2-го ранга остается нигде не плотное подмножество множества P_n , мера которого равна величине $b_2 M (P_n)$. Обозначим через A_2 объединение всех таких множеств. Тогда A_2 дизъюнктно с A_1 , также нигде не плотно, причем

$$M (A_2) = b_2 \sum_{n=1}^{\infty} M (P_n) < b_2 .$$

Аналогично строятся и последующие (дизъюнктные с предыдущими $A_к$) нигде не плотные подмножества A_n множества G : A_n совпадает с объединением множеств, получаемых в ходе выбрасывания из брусов (n – 1) –го ранга брусов n –го ранга, причем диаметры брусов n –го ранга меньше d_n . При этом для $n > 1$

$$M\,(A_n\,) < \ b_n \ .$$

Обозначим через A объединение всех A_n и через B - разность множеств G и A. Докажем, что для множеств A, B выполняется утверждение леммы.

Для этого рассмотрим произвольное непустое открытое подмножество W множества G .

Без ограничения общности можно считать, что W - открытый шар с центром в некоторой точке x из G некоторого радиуса r .

Зафиксируем такой номер n , для которого $d_n < \frac{r}{4}$.

Заметим, что объединение брусов n –го ранга плотно во всех брусах предыдущего ранга, а потому плотно и в G . Следовательно, в окрестности радиуса r/4 точки x (центра шара W) найдется некоторая точка некоторого бруса E n – го ранга. С учетом того, что диаметр бруса n –го ранга меньше d_n и потому меньше r/4 , отсюда следует, что брус E включен в шар W .

Поскольку множество $A_к$ строится с помощью выбрасывания брусов к-го ранга, то оно не пересекается ни с ними, ни с брусами более высоких рангов. Следовательно, наш брус E, имея ранг n , не пересекается ни с одним из множеств $A_к$ при $k \le n$.

Пересечение же E с множеством A_{n+1} получается путем выбрасывания из E некоторой счетной последовательности (E_j) брусов (n +1) –го ранга, а потому мера этого пересечения равна

$$\mathrm{M}\,(\mathrm{E}\,) - \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} M\,(E_j) = \mathrm{M}\,(\mathrm{E}\,) - \ s_{n+1}\,\mathrm{M}\,(\mathrm{E}\,) = b_{n+1}\,\mathrm{M}\,(\,\mathrm{E}\,)\,.$$

Пересечение множества E с A_{n+2} получается путем выбрасывания из подмножества бруса E (а именно, из объединения содержащихся в E брусов (n+1)-го ранга) некоторой последовательности брусов (n+2)-го ранга, а потому мера указанного пересечения не превосходит b_{n+2} M (E).

Аналогично, для каждого последующего множества A_{n+k} мера его пересечения с E не превосходит величины b_{n+k} M (E) .

Поскольку A задано как объединение всех A_j и поскольку брус E не пересекается с первыми n из них, то отсюда следует, что мера пересечения множеств A, E не превосходит $M\,(E\,)\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j$, а потому меньше M (E) .

Поскольку же подмножество B множества G дополнительно по отношению к подмножеству A , то мера его пересечения с E равна разности между величиной M (E) и мерой пересечения множеств A , E , а потому положительна. С учетом того, что шар W включает в себя брус E , отсюда следует, что мера пересечения этого шара с множеством B тем более положительна.

Что же касается меры пересечения множеств A , W , то с учетом того, что A включает в себя A_{n+1} , а W включает в себя E , эта мера не меньше величины b_{n+1} M (E) , а потому также положительна. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть E_1 , E_2 - два множества в топологическом пространстве T , B - база топологии в T , B_1 - система элементов базы, насчитывающих бесконечное множество точек из E_1 , а B_2 - система элементов базы, насчитывающих бесконечное множество точек из E_2 . Тогда если B_1 включается в B_2 , то множество предельных точек множества E_1 включается в множество предельных точек множества E_2 .*

Доказательство. Пусть x - предельная точка множества E_2 , W - ее произвольная окрестность. Поскольку B - база топологии, то найдется окрестность V точки x , входящая в эту базу и включающаяся в W . Из факта предельности точки x для множества E_2 следует, что каждая ее окрестность, в том числе и V, насчитывает бесконечное число точек из E_2. Следовательно, множество V входит в систему B_2. Но тогда V входит и в систему B_1. Итак, каждая окрестность W точки x включает в себя некоторую окрестность V, входящую в систему B_1, а потому содержит бесконечное множество точек из E_1. Следовательно, точка x является предельной и для множества E_1. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть топологическое пространство T имеет счетную базу F. Тогда каждое множество E в пространстве T можно разбить на два таких дизъюнктных множества A и B, для каждого из которых множество его предельных точек совпадает с множеством предельных точек для E.*

Доказательство. Пусть F_0 - система элементов базы F, насчитывающих бесконечное число точек из E. Система F_0 как часть счетной базы не более чем счетна.

Сначала рассмотрим случай, когда система F_0 счетна. Занумеруем все ее элементы в бесконечную последовательность (V_n). В множестве V_1 выберем две различные точки $a_{1\,1}$, $b_{1\,1}$, принадлежащие E, а затем еще и отличные от них точки $a_{1\,2}$, $b_{1\,2}$, также принадлежащие E. После этого в множестве V_2 выбираем две отличные от ранее выбранных точки $a_{2\,1}$, $b_{2\,1}$. Затем производим выбор последующих точек $a_{n\,k}$, $b_{n\,k}$ (принадлежащих пересечению множества V_n с множеством E) в порядке возрастания суммы индексов $n+k$, то есть следуя так называемому диагональному методу Кантора. В результате в каждом из V_n будет насчитываться две бесконечные последовательности точек $a_{n\,k}$, $b_{n\,k}$ из E. Отнесем все точки $a_{n\,k}$ к множеству A, а все точки $b_{n\,k}$ - к множеству B. Если в пересечении множеств V_n и E остались еще точки, то распределим их произвольным образом между A и B. Тогда каждый элемент V_n системы F_0 насчитывает бесконечное число точек каждого из множеств A и B, а потому остается применить лемму 2.

Теперь рассмотрим случай, когда система F_0 конечна. В этом случае индекс n множеств V_n пробегает конечное число значений, а потому выбор точек $a_{n\ k}$, $b_{n\ k}$ можно производить сначала для к=1 во всем диапазоне изменения индекса n , затем для к=2 также во всем диапазоне изменения n , и так далее. Снова остается отнести все точки $a_{n\ k}$ к множеству A , точки $b_{n\,k}$ - к множеству B (а остальные точки пересечения множеств V_n , E опять можно произвольно распределить между A и B). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть M - вполне конечная неотрицательная мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств одномерного евклидова пространства L и имеющая свойство базисности. Тогда M можно разложить в сумму двух взаимно сингулярных мер, также имеющих свойство базисности.*

Доказательство. Разложим меру M в сумму взаимно сингулярных диффузной меры C (принимающей нулевое значение на всех одноточечных множествах) и дискретной меры D , сосредоточенной на некотором не более чем счетном множестве E . Поскольку в одномерном пространстве гиперплоскости совпадают с одноточечными множествами, то для диффузной меры C выполняется соответствующее условие леммы 1.

Пусть F - множество предельных точек множества E , G - дополнение F до всего L .

Каждое непустое открытое подмножество W множества G может содержать только изолированные точки множества E и потому включает в себя некоторое непустое открытое множество V , не содержащее уже никаких точек множества E . Тогда $D(V) = 0$. Поскольку же $M(V) = C(V) + D(V) > 0$, то отсюда вытекает, что $C(V) > 0$ и что тем более $C(W) > 0$. Следовательно, для диффузной меры C и множества G можно применить лемму 1. Поэтому G можно разбить на два таких дизъюнктных измеримых множества G_1, G_2, что на их пересечениях с каждым непустым открытым подмножеством множества G мера C принимает положительные значения.

Множество же E (на котором сосредоточена мера D) в соответствии с леммой 3 можно разбить на два таких дизъюнктных множества E_1 и E_2, для каждого из которых множество его предельных точек совпадает с множеством предельных точек множества E, то есть с множеством F.

Пусть теперь C_1, C_2 - произведения индикаторов множеств G_1, G_2 на диффузную меру C, а D_1, D_2 - произведения индикаторов множеств E_1, E_2 на дискретную меру D.

Зададим меры M_i ($i=1, 2$) формулами $M_i = C_i+D_i$. Ясно, что меры M_1 и M_2 взаимно сингулярны и что их сумма совпадает с M.

Остается доказать, что каждая из мер M_1 и M_2 имеет свойство базисности. Для этого достаточно доказать, что на каждой открытой окрестности W_x каждой точки x значения этих мер положительны.

Если x принадлежит множеству G, то пересечение V окрестности W_x с множеством G непусто и открыто, а потому на пересечениях множества V с множествами G_1, G_2 диффузная мера C принимает положительные значения. В этом случае $C_i(W_x) > 0$, а потому тем более $M_i(W_x) > 0$ ($i=1, 2$).

Если же x принадлежит F, то x служит предельной точкой для E. Но тогда x служит предельной точкой и для множеств E_1 и E_2, а потому окрестность W_x содержит точки множеств E_1 и E_2. В этом случае $D_i(W_x) > 0$, а потому тем более $M_i(W_x) > 0$ ($i=1, 2$). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть для меры M выполняются условия леммы 4. Тогда для любого натурального* n *существует разбиение меры M на n компонент со свойством базисности, а также существует разбиение M на счетное семейство компонент с таким свойством.*

Доказательство первого утверждения леммы 5 легко проводится методом математической индукции и опирается на лемму 4, а второе утверждение леммы вытекает из того факта, что при каждом базисном разбиении меры M на n компонент последнюю из них можно разбить на еще две базисные компоненты, продолжая этот процесс до бесконечности.

Теорема 1. *Пусть M – вполне конечная мера-произведение, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства X и имеющая свойство базисности. Тогда для каждого натурального n меру M можно разложить в сумму n взаимно сингулярных мер-произведений со свойством базисности, а также можно разложить в сумму счетного семейства взаимно сингулярных мер-произведений с указанным свойством.*

Доказательство. Пусть P - одномерная проекция M на линейную оболочку первого вектора соответствующей полной ортонормированной системы пространства X, а Φ - мера-произведение, составленная из одномерных проекций M на линейные оболочки остальных векторов упомянутой системы. Тогда M совпадает с произведением мер P и Φ. Меры P и Φ имеют свойство базисности, поскольку при проектировании на подпространства прообраз непустого открытого множества подпространства представляет собой непустое открытое множество всего пространства, на котором исходная мера M в силу ее базисного свойства принимает положительное значение. Следовательно, для меры P, заданной в одномерном пространстве, выполняются условия лемм 4 и 5, а потому для нее существует разложение в сумму любого наперед заданного числа взаимно сингулярных мер $P_к$, имеющих свойство базисности. Но тогда произведения мер $P_к$ на меру Φ представляют собой взаимно сингулярные меры-произведения со свойством базисности, причем их сумма совпадает с M. Теорема доказана.

Следствие 1. *Невырожденную гауссовскую меру в пространстве X можно разложить в сумму любого наперед заданного числа взаимно сингулярных мер-произведений, имеющих свойство базисности.*

ССЫЛКИ

[1] Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь. (1967). *Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.* - М.: Наука.

[2] Вершик А.М., Судаков В.Н. (1969). Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах. *Записки научных семинаров ЛОМИ.* 12, 7-67.

[3] Скороход А.В. (1975). *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука.

[4] Розанов Ю.А. (1966). Гауссовские бесконечномерные распределения. *Труды Математического института им. Стеклова.* 108, 1-136.

[5] Судаков В.Н. (1959). Линейные множества с квазиинвариантной мерой. *Доклады АН СССР.* 127, № 3, 524-525.

[6] Хафизов М.У. (1989). О пространстве дифференцируемости продакт-меры. *Вестник Моск. Ун-та. Серия 1. Математика, механика.* 44, № 2, 81-84.

[7] Романов В.А. (1990). Структура множеств направлений непрерывности мер-произведений и их рядов в гильбертовом пространстве. *Математические заметки.* 47, № 1, 166-168.

[8] Фомин С.В. (1968). Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье. *Успехи математических наук.* 23, № 2, 215-216.

[9] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. (1971). Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. Дифференцируемые меры. *Труды Московского математического общества.* 24, 133-174.

[10] Романов В.А. (2007). Слабые базисы векторных мер. *Украинский математический журнал.* 59, № 10, 1436-1440.

[11] Feldman J. (1958). Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. *Pacific Journal Mathematics.* 8, № 4, 699-708.

[12] Гаек Я. Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса. *Чехословацкий Математический журнал.* 8, 610-618.