

УДЖ 519.21

ПРО ОДИН КЛАС МІР РАЙХМАНА, ПОРОДЖЕНИХ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

О.П. МАКАРЧУК

Построено два класа вероятностных мер Райхмана, порожденных случайными величинами типа Джессена-Винтнера.

We construct two classes of probability measures Reichman generated by the random variables of type Jessen-Wintner.

Нехай ξ_k послідовність незалежних випадкових величин (в.в), які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}$ відповідно.

В.в $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$ називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з двома надлишковими цифрами.

За теоремою Джессена-Вінтнера [4] в.в. ξ має чистий розподіл, тобто чисто дискретний або чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний. За теоремою П.Леві [6] в.в ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді коли $\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq i \leq 3} \{p_{ik}\} > 0$.

Характеристичною функцією випадкової величини називається комплекснозначна функція $f_{\xi}(t) = M(e^{it\xi})$, де M математичне сподівання. Відомо[2, с.35], якщо в.в ξ має абсолютно неперервний розподіл, то $L_{\xi} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_{\xi}(t)| = 0$. Ймовірнісна міра $P_{\xi}(\cdot)$ породжена випадковою величиною ξ , для якої $L_{\xi} = 0$ називається мірою Райхмана. Потрібно відмітити, що в роботі [3] побудовані приклади сингулярних, відносно міри Лебега ймовірнісних мір Райхмана.

Теорема 1. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} - \sqrt{p_{3k}})^2 < \infty$, то $P_{\xi}(\cdot)$ – ймовірнісна міра Райхмана..

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k 2^{-k}$, де ψ_k - незалежні випадкові величини, які мають наступні розподіли

$$\psi_k : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q_{0k} & \frac{1}{2} - q_{0k} & q_{0k} & \frac{1}{2} - q_{0k} \end{array}$$

$$\text{де } q_{0k} = \frac{(\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{2k}})^2}{2((\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} + \sqrt{p_{3k}})^2)}, \quad \forall k \in N$$

Функція розподілу в.в ψ абсолютно неперервна [2], отже, ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега на $[0; 3]$.

Визначимо дві послідовності ймовірнісних просторів $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$ і

$\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$ наступним чином:

$\Omega_k = \{0; 1; 2; 3\}$, σ -алгебра A_k визначена на всіх підмножинах Ω_k .

$$\mu_k(0) = p_{0k}, \mu_k(1) = p_{1k}, \mu_k(2) = p_{2k}, \mu_k(3) = p_{3k};$$

$$\nu_k(0) = q_{0k}, \nu_k(1) = q_{1k} = \frac{1}{2} - q_{0k}, \nu_k(2) = q_{2k} = q_{0k}, \nu_k(3) = q_{3k} = \frac{1}{2} - q_{0k};$$

Очевидно, що $\mu_k \sim \nu_k$ для будь-яких $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки

$$\text{ймовірнісних просторів } (\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \mu_k), (\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \nu_k)$$

Використовуючи, теорему Какутані [5], можемо зробити висновок, що $\mu \sim \nu$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0, \text{ враховуючи умову маємо:}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} + \sqrt{p_{3k}})^2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} + \sqrt{p_{3k}})^2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} + \sqrt{p_{3k}})^2)) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} - \sqrt{p_{3k}})^2 < \infty$$

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{\varphi} [0; 3]$ визначене рівністю:

$$\forall \omega \in \Omega : \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^k}$$

Визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією φ наступним чином

$$\mu^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$$

$$\nu^*(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножини E .

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_ξ , а міра ν^* — з ймовірнісною мірою P_ψ еквівалентною мірі Лебега. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^* . Оскільки $\nu^* \sim \lambda$ то з умови випливає абсолютна неперервність розподілу ξ , а тому $L_\xi = 0$.

Теорема 2. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) < \infty$, то $P_\xi(\cdot)$ — ймовірнісна міра Райхмана.

Доведення. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) < \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) = 0$, $1 \geq p_{0k} + p_{3k} \geq 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}} \rightarrow 1$, при $k \rightarrow \infty$, тому $\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} + p_{3k}) = 1$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{3k}})^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} + p_{3k} - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) = (1 - 1) = 0$, звідки
 $\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} - p_{3k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{3k}})(\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{3k}}) = 0$.

Отже, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{0k} = \frac{1}{2}(\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} + p_{3k}) + \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} - p_{3k})) = \frac{1}{2}$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{3k} = \frac{1}{2}(\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} + p_{3k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{0k} - p_{3k})) = \frac{1}{2}$.

Таким чином, існує натуральне число k_0 : $p_{0k}^2 + p_{3k}^2 \neq 0, \forall k \geq k_0, k \in N$.

Згортка абсолютно неперервної та дискретної функцій розподілу є абсолютно неперервною, тому не обмежуючи загальності вважатимемо $k_0 = 1$.

Розглянемо випадкову величину

$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k 2^{-k}$, де ψ_k - незалежні випадкові величини, які мають наступні

розподіли

ψ_k :	0	1	2	3
	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

$\forall k \in N$

Легко бачити, випадкова величина ψ , має рівномірний на $[0; 3]$ розподіл.

Отже, ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега на $[0; 3]$.

Визначимо дві послідовності ймовірнісних просторів $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$ і

$\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$ наступним чином:

$\Omega_k = \{0;1;2;3\}$, σ -алгебра A_k визначена на всіх підмножинах Ω_k .

$$\mu_k(0) = p_{0k}, \mu_k(1) = p_{1k}, \mu_k(2) = p_{2k}, \mu_k(3) = p_{3k};$$

$$v_k(0) = q_{0k} = \frac{1}{2}, v_k(1) = q_{1k} = 0, v_k(2) = q_{2k} = 0, v_k(3) = q_{3k} = \frac{1}{2};$$

Очевидно, що $\mu_k \sim v_k$ для будь-яких $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки

$$\text{ймовірнісних просторів } (\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \mu_k), (\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \nu_k)$$

Використовуючи, теорему Какутані [5], можемо зробити висновок, що

$$\mu \sim \nu \text{ тоді і тільки тоді, коли } \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0,$$

враховуючи умову маємо:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0 &\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2} p_{0k}} + \sqrt{\frac{1}{2} p_{3k}} \right) > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2} p_{0k}} + \sqrt{\frac{1}{2} p_{3k}} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p_{0k} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + p_{3k}}{2} \right) < \infty \end{aligned}$$

що виконується, адже

$$0 \leq 1 - \frac{p_{0k} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + p_{3k}}{2} \leq 1 - \frac{2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}}}{2} = (1 - 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}})$$

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{\varphi} [0;3]$ визначене рівністю:

$$\forall \omega \in \Omega: \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^k}$$

Визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією φ наступним чином

$$\mu^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$$

$$\nu^*(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножини E .

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_{ξ} , а міра ν^* — з ймовірнісною мірою P_{ν} еквівалентною мірі Лебега. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^* . Оскільки $\nu^* \sim \lambda$ то з умови випливає абсолютна неперервність розподілу ξ , а тому $L_{\xi} = 0$.

ПОСИЛАННЯ

- [1]. Лукач Е. *Характеристические функции*. М.: Наука главная редакция физ.- мат. лит., 1979. □ 424с.
[2]. Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. □ 296с.

- [3]. Albeverio, S., Goncharenko, Y., Pratsiovyti, M., Torbin, G., (2007). Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Oper. Stochastic Equations*, **15**, №1. □ P.89-97.
- [4]. Jessen, B., Wintner, A. (1935). Distribution function and Riemann Zeta-function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 38, 48-88.
- [5]. Kakutani, S. (1948). Equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, 49, 214-224.
- [6]. Levy, P. (1931). Sur les series dont les termes sont des variables independantes, *Studia math.* 3, 119-155.

ЖмУДЖ 519.53+517.987

МЕРЫ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ БАЗИСНОСТИ

В.О. РОМАНОВ

Доведено, що для кожної міри-добутку із властивістю базисності в нескінченно вимірному сепарабельному гільбертовому просторі існує її розкладання на довільне число взаємно сингулярних компонент, які теж є мірами-добутками із властивістю базисності.

It is proved that for every product-measure with basis property in infinite-dimensional separable Hilbert space there exists its distribution on any number mutually singular components that also are the product-measures with basis property.

1. Введение. Известно [1 -3], что среди всех классов мер в гильбертовом пространстве наибольшее число применений к различным задачам бесконечномерного анализа и теории случайных процессов находят меры-произведения, в том числе гауссовские [4], квазиинвариантные [5], дифференцируемые [6] и непрерывные [7]. Также известно [8-9], что в задачах теории бесконечномерных распределений бывает весьма полезным переход от рассмотрения функций множества к изучению функций точки. Поскольку осуществить такой переход помогает наличие мер со свойством базисности [10], то представляет интерес исследование мер-произведений, имеющих указанное свойство. Под базисным разбиением базисной меры понимаем ее разложение в сумму конечного или счетного числа взаимно сингулярных мер, также имеющих свойство базисности. В работах [11], [12] было установлено, что каждые две гауссовские меры в гильбертовом пространстве всегда либо эквивалентны, либо взаимно сингулярны. В связи с этим представляет интерес вопрос о том, можно ли получить базисное