ПОСИЛАННЯ

[1] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения,* В. - Москва: Мир, 1984, 571с., (т.2).

[2] Barnorff-Nielsen O. *On the limit behaviour of extreme order statistics*, 1963, vol.34, №3, p. 992-1002.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ І ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

І. Г.КЛЮЧНИК

Получено асимптотический метод интегрирования линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

The obtained asymptotic method of integration linear system of differential equations with small parameter with a turning point.

В [1] приводиться огляд літератури з основних методів асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту. В [2] вперше розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. В даній роботі система диференціальних рівнянь, розглядувана в [2], асимптотично зводиться до інтегрованої системи рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1$$

$$\varepsilon y'_1 = (B(x)+\varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \qquad (1)$$

де $y \in R^p, y_1 \in R^2,\ A(x),\ A_1(x),\ B_1(x),\ B_2(x) -$ голоморфні при

$$|x| \le x_0 \qquad (2)$$

матриці, $B(x) -$ матриця вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon -$ малий додатній параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.

Будемо вважати, що

$$\mathrm{tr}B_1(x) = \mathrm{tr}A(x) \equiv 0. \qquad (4)$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C_2(\varepsilon)v, \qquad (5)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_2(\varepsilon)u, \qquad (6)$$

в якій $\Phi(x,\varepsilon)$ - блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x,\varepsilon) & V_1(x,\varepsilon) \\ U_1(x,\varepsilon) & V(x,\varepsilon) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

і матриці $U(x,\varepsilon), U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon), V(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями ε

$$U(x,\varepsilon) = U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x), \quad U_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x),$$

$$V(x,\varepsilon) = V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x), \quad V_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x). \qquad (8)$$

Розглянемо відповідно $(p \times 2)$- і $(2 \times p)$- вимірні матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді

$$C_2(\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n C_n, & \text{якщо} \quad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \\ C_0, & \text{якщо} \quad \varepsilon = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

$$D_2(\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n D_n, & \text{якщо} \quad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \\ D_0, & \text{якщо} \quad \varepsilon = 0, \end{cases}$$

β – раціональне число з проміжку (0;1) таке, що при фіксованому $\varepsilon \in [-\varepsilon_0; \varepsilon_0]$ число ε^{β} є додатнім:

$$b_n = \begin{cases} \|C_n\|^{-1}, & \text{якщо } C_n \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } C_n = 0, \end{cases} \quad a_n = \begin{cases} \|D_n\|^{-1}, & \text{якщо } D_n \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } D_n = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

C_n, D_n сталі матриці вигляду

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{1n} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ c_{pn} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ d_{n1} & \cdots & d_{np} \end{pmatrix}.$$

Лема. Матричні ряди (9) є рівномірно збіжні при $0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Матричні функції $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ є нескінченно диференційовні при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ та мають асимптотичні розвинення

$$C_2(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad D_2(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_n, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (11)$$

З (1), (5), (6) випливає, що матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix} \Phi. \qquad (12)$$

Згідно леми, матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді

$$C_2(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{r} \varepsilon^n C_n + O(\varepsilon^{r+1}), \ |\varepsilon| \le \varepsilon_0 . \qquad (13)$$

Підставляючи (7) в (12) одержимо, що матриці $V(x,\varepsilon)$, $U(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$, $V_1(x,\varepsilon)$ задовольняють матричним диференціальним рівнянням

$$U'(x,\varepsilon) + V_1(x,\varepsilon)D_2(\varepsilon) = A(x)U(x,\varepsilon) + A_1(x)U_1(x,\varepsilon), \qquad (14)$$

$$\varepsilon V_1'(x,\varepsilon) + \varepsilon U(x,\varepsilon)C_2(\varepsilon) + V_1(x,\varepsilon)B(x) = \varepsilon A(x)V_1(x,\varepsilon) + \varepsilon A_1(x)V(x,\varepsilon),$$

$$\varepsilon U_1'(x,\varepsilon) + \varepsilon V(x,\varepsilon)D_2(\varepsilon) = \varepsilon B_2(x)U(x,\varepsilon) + \varepsilon B_1(x)U_1(x,\varepsilon) + B(x)U_1(x,\varepsilon),$$

$$\varepsilon V'(x,\varepsilon) + \varepsilon U_1(x,\varepsilon)C_2(\varepsilon) + V(x,\varepsilon)B(x) = \varepsilon B_2(x)V_1(x,\varepsilon) + \varepsilon B_1(x)V(x,\varepsilon) + B(x)V(x,\varepsilon).$$

Підставивши в одержані рівняння розвинення матриць $V(x,\varepsilon), U(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon), U_1(x,\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді (8), (13) отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів розвинень (8), (11), які знайдені в [2]. Підставляючи знайдені матриці $C_n, D_n, n = 0,1,...$ в (9) однозначно визначимо матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді рівномірно збіжних степеневих рядів при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Таким чином доведена наступна теорема:

Теорема. Нехай матриці системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді система рівнянь (1) зводиться до системи (5), (6) за допомогою перетворення (7). Матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (12) і є голоморфною за змінною x в області $|x| \le x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0$, а також $\det \Phi(x,0) \equiv 1$. Коефіцієнти $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ рівняння (14) зображуються у вигляді рівномірно збіжних при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ рядів (9). Матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ є нескінченно диференційовані при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ і мають асимптотичні розвинення (11).

ПОСИЛАННЯ

[1] Wasow W. *Linear turning point theory.* - Springer – Verlag New York Ins., 1985. – 243 p

[2] Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. *Укр. мат. журн.* - 2002. - 54, № 11. - С. 1505- 1516

[3] Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.*-М.:Мир, 1968. – 464с.