

[8] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения. *Прикладна гідромеханіка*.- 2001.- Т.3(75), N4.- С. 38- 46.

[9] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околоритических волновых числах. *Динамические системы*.- 2001.- Вып. 17.- С. 58-67.

[10] Стеценко О.Г. Стационарный рух точкового вихору в шарі скінченної товщини стратифікованого середовища, обмеженого твердими границями. *Приклад. гідромеханіка* . — 2010. — 12, N 1. — С. 68-75.

[11] Тарапов И.Е. *Механика сплошной среды*. В 3 ч. Ч. 3: *Механика невязкой жидкости*.- Харьков: Золотые страницы, 2005.- 332 с.

[12] Черкесов Л.В. *Гидродинамика поверхностных и внутренних волн*.- К.: Наук, думка, 1976.- 364 с.

[13] Avramenko O., Naradovyy V.. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*.- 2012. – Vol. 1.

[14] Camassa R., Viotti C. A model for large-amplitude internal waves with finite-thickness pycnocline. *Acta Appl. Math.*- 2012.- № 1.- P. 75 – 84.

УДК 519.21

ВАЖЛИВІ МОМЕНТНІ ОЦІНКИ ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ

К.С. АКБАШ

Установлено обмеженість моментів нормованого максимуму.

The limitedness of moments of normalized maximum are established.

Нехай ξ випадкова величина в \mathbb{R}^1 з функцією розподілу $F(x)$, ξ_i незалежні копії ξ , $z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$.

Покладемо

$$\tau(F) = \sup(x : F(x) < 1),$$

$$\varphi(y) = \inf\left(x \geq 1 : \frac{1}{1 - F(x)} \geq y\right), \quad 1 \leq y < \infty, \quad (1)$$

$$a_n = \varphi(n) = \inf \left(x \geq 1 : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n} \right)$$

Далі будемо вважати, що $F(x)$ неперервна, зростаюча функція і $\tau(F) = \infty$. Будемо позначати через

$$x_+ = \max(x, 0), \quad x_- = \max(-x, 0).$$

Лема 1. Нехай $x > 0, y > 0$. Тоді при $q \geq 1$

$$|x - y|^q \leq |x^q - y^q|. \tag{3}$$

Доведення лема 1. Досить розглянути випадок $q > 1$. Нехай $y \geq x > 0, 0 < z < z = \frac{x}{y} \leq 1$. Ясно, що нерівність (3) еквівалентна такій

$$|1 - z|^q \leq 1 - z^q. \tag{4}$$

Покладемо

$$f(z) = 1 - z^q - (1 - z)^q, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Тоді матимемо

$$f'(z) = -qz^{q-1} + q(1-z)^{q-1} = \begin{cases} 0, & z = \frac{1}{2}, \\ > 0, & 0 \leq z < \frac{1}{2}, \\ < 0, & \frac{1}{2} < z \leq 1. \end{cases}$$

Таким чином функція $f(z)$ зростає на інтервалі $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ і спадає на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Окрім того $f(0) = f(1) = 0$. Звідси зрозуміло, що $f(z) \geq 0$ при $z \in (0, 1)$, тобто нерівність (4) установлена. \square

Лема 2. Нехай ξ випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$, (ξ_i) незалежні копії ξ . Послідовність a_n визначена рівністю (2), $z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$. Якщо виконуються умови

$$\exists x_0, \quad 1 < x_0 < \infty : \int_{x_0}^{+\infty} \frac{x^q dF(x)}{1 - F((x^q - x_0^q)^{1/q})} < \infty, \quad (5)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \int_1^{+\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(x - \varepsilon)} < \infty \quad (6)$$

то

$$E \sup_{n \geq 1} |z_n - a_n|^q < \infty. \quad (7)$$

Доведення лема 2. 1-й крок. Випадок $q=1$. Очевидно, що майже напевне

$$\sup_{n \geq 1} |z_n - a_n| \leq \max \left(\sup_{n \geq 1} (z_n - a_n)_+, \sup_{n \geq 1} (a_n - z_n)_+ \right).$$

Таким чином досить установити оцінки

$$E \sup_{n \geq 1} (z_n - a_n)_+ < \infty \quad (8)$$

$$E \sup_{n \geq 1} (a_n - z_n)_+ < \infty. \quad (9)$$

Спочатку розглянемо оцінку (8). За означенням a_n не спадна послідовність. Тоді зрозуміло, що майже напевне

$$\sup_{n \geq 1} (z_n - a_n)_+ \leq \sup_{n \geq 1} (\xi_n - a_n)_+$$

і (8) буде випливати із нерівності

$$E \sup_{n \geq 1} (\xi_n - a_n)_+ < \infty.$$

Звідси ясно, що досить показати обмеженість інтегралу

$$\int_1^{\infty} P \left(\sup_{n \geq 1} (\xi_n - a_n)_+ > x \right) dx < \infty \quad (10)$$

(див. 1, с.198).

Оцінимо зверху підінтегральний вираз в (10)

$$P\left(\sup_{n \geq 1}(\xi_n - a_n) > x\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(\xi_n > x + a_n) = \sum_{n \geq 1} (1 - F(x + a_n)).$$

Нагадаємо, що $a_n = \varphi(n)$, $n \geq 1$, де $\varphi(n)$ визначена в рівності (1), і

$$1 - F(x + a_n) \leq \int_{n-1}^n (1 - F(x + \varphi(y))) dy.$$

Таким чином

$$\sum_{n \geq 1} (1 - F(x + a_n)) \leq \int_0^\infty (1 - F(x + \varphi(y))) dy = \int_0^\infty \left(\int_{x+\varphi(y)}^\infty dF(z) \right) dy = \int_{x+1}^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{1-F(z-x)}} dy \right) dF(z) \leq \int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z-x)}.$$

Остання умова та оцінка (5) дозволяють оцінити інтеграл (10)

$$\int_1^\infty \left(\int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z-x)} \right) dx = \int_2^\infty dF(z) \int_1^{z-1} \frac{1}{1 - F(z-x)} dx \leq C \int_2^\infty \frac{z dF(z)}{1 - F(z-1)} < \infty.$$

Тобто нерівність (8) установлена. Покажемо справедливість оцінки (9).

Як відомо ([2]), при виконанні умови (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - a_n) = 0 \text{ м.н.}$$

Тому $\forall x > 0$

$$\left\{ \sup_{n \geq 1} (a_n - z_n) > x \right\} \leq \bigcup_{n \geq 1} \{a_n - z_n > x, a_{n+1} - z_{n+1} < x\},$$

а враховуючи, що a_n монотонно зростаюча послідовність, отримаємо

$$P\left(\sup_{n \geq 1} (a_n - z_n) > x\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(z_n < a_n - x, \xi_{n+1} > a_{n+1} - x) \leq \sum_{n \geq 1} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)). \quad (11)$$

Для цього, так само, як і у випадку нерівності (8) перевіримо обмеженість інтегралу

$$I(x_0) = \int_{x_0}^\infty P\left(\sup_{n \geq 1} (a_n - z_n) > x\right) dx,$$

при деякому x_0 , $1 < x_0 < \infty$.

$$\begin{aligned} I(x_0) &\leq \int_{x_0}^\infty \left[\sum_{n \geq 1} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)) \right] dx = \sum_{n \geq 1} \int_{x_0}^\infty F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)) dx = \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{-x_0}^{a_n - x_0} F^n(y)(1 - F(y)) dy = \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{n \geq m} F^n(y)(1 - F(y)) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$m = \left[\frac{1}{1 - F(x_0 + y)} \right].$$

Нерівність $a_n - x_0 \geq y$ в силу рівності $1 - \frac{1}{n} = F(a_n)$ еквівалентна такій

$$n \geq \frac{1}{1 - F(x_0 + y)}.$$

Виберемо y_0 таке, що $0 < F(y_0) < 1$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{y_0} \sum_{n \geq m} F^n(y)(1 - F(y)) dy \leq \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1 - F(y)}{1 - F(y_0)} dy \leq \frac{1}{1 - F(y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |y| dF(y) < \infty. \quad (13)$$

Далі

$$\int_{y_0}^{\infty} \sum_{n \geq m} F^n(y)(1 - F(y)) dy = \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{m+1} dy \leq \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{\frac{1}{1 - F(x_0 + y)}} dy. \quad (14)$$

Покладемо $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$. Скориставшись елементарними оцінками

$$(1 - x)^{\frac{1}{x}} \leq \exp(-1) \text{ та } \exp(-x) < \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Запишемо останній інтеграл в (14) так

$$\int_{y_0}^{\infty} \left((1 - \bar{F}(y))^{\frac{1}{\bar{F}(y)}} \right)^{\frac{1 - F(y)}{1 - F(x_0 + y)}} dy \leq \int_{y_0}^{\infty} \frac{1 - F(x_0 + y)}{1 - F(y)} dy \leq C \int_{t_0}^{\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F(t - x_0)} dt. \quad (15)$$

де $t_0 = x_0 + y_0$.

Залишається помітити, що інтеграл в умові (5) при $q = 1$ можна зобразити у такому вигляді:

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{y dF(y)}{1 - F(y - y_0)} = - \frac{y(1 - F(y))}{1 - F(y - y_0)} \Big|_{y_0}^{\infty} + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1 - F(y)}{1 - F(y - y_0)} dy + \int_{y_0}^{\infty} \frac{y(1 - F(y))}{(1 - F(y - y_0))^2} dF(y - y_0) \quad (16)$$

Ясно, що перший доданок справа обмежений, а другий еквівалентний інтегралу (15).

Таким чином встановлено, що обмеженість інтегралу (5) достатня для справедливості оцінки (9) при $q = 1$.

2-й крок. Нехай $q > 1$. Припустимо спочатку, що $\forall k \geq 1, \xi_k \geq 0$ майже напевне. За лемою 1

$$\sup_{n \geq 1} |z_n - a_n|^q \leq \sup_{n \geq 1} |z_n^q - a_n^q|. \tag{17}$$

Покладемо

$$\xi_k^* = \xi_k^q, a_n^* = \xi_n^q, z_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k^*, F^*(x) = P(\xi_k^* < x) = F(x^{\frac{1}{q}}).$$

Із наведених вище міркувань (1-й крок, $q = 1$) маємо

$$E \sup_{n \geq 1} |z_n^* - a_n^*| = E \sup_{n \geq 1} |z_n^q - a_n^q| < \infty,$$

якщо при деякому $y_0 > 0$

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{y dF^*(y)}{1 - F^*(y - y_0)} = \int_{y_0}^{\infty} \frac{y dF(y^{1/q})}{1 - F((y - y_0)^{1/q})} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{t^q dF(t)}{1 - F((t^q - t_0^q)^{1/q})} < \infty. \tag{18}$$

де $t_0 = y_0^{1/q}$. Звідси та оцінок (5) та (17) негайно випливає (9).

Нехай тепер ξ_k довільні випадкові величини в умовах теореми. Із відомих елементарних нерівностей отримаємо

$$\sup_{n \geq 1} |z_n - a_n|^q = \sup_{n \geq 1} |(z_n)_+ - (z_n)_- - a_n|^q \leq 2^{q-1} \left(\sup_{n \geq 1} |(z_n)_+ - a_n|^q + \sup_{n \geq 1} |(z_n)_-|^q \right). \tag{19}$$

Зрозуміло, що

$$(z_n)_+ = \max_{1 \leq k \leq n} (\xi_k)_+ \tag{20}$$

а

$$(z_n)_- \leq |\xi_1|. \tag{21}$$

Із означення a_n ясно, що при переході від в. в. (ξ_n) до в.в. $((\xi_n)_+)$ послідовність a_n не змінюється. Тому із наведеного вище та (20)-(21) одержимо

$$E \sup_{n \geq 1} |(z_n)_-|^q < \infty, E \sup_{n \geq 1} |(z_n)_+ - a_n|^q < \infty.$$

Ці оцінки разом з нерівністю (19) і завершують доведення леми 2. \square

ПОСИЛАННЯ

- [1] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, В. - Москва: Мир, 1984, 571с., (т.2).
- [2] Barnorff-Nielsen O. *On the limit behaviour of extreme order statistics*, 1963, vol.34, №3, p. 992-1002.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ І ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

І. Г.КЛЮЧНИК

Получено асимптотический метод интегрирования линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

The obtained asymptotic method of integration linear system of differential equations with small parameter with a turning point.

В [1] приводиться огляд літератури з основних методів асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту. В [2] вперше розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. В даній роботі система диференціальних рівнянь, розглядувана в [2], асимптотично зводиться до інтегрованої системи рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1$$

$$\varepsilon y'_1 = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \quad (1)$$

де $y \in \mathbb{R}^p, y_1 \in \mathbb{R}^2$, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ – голоморфні при

$$|x| \leq x_0 \quad (2)$$

матриці, $B(x)$ – матриця вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, ε – малий додатний параметр, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

Будемо вважати, що

$$\text{tr}B_1(x) = \text{tr}A(x) \equiv 0. \quad (4)$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x, \varepsilon) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C_2(\varepsilon)v, \quad (5)$$