

Используя формулу для вычисления биномиальных коэффициентов, перепишем (4) в такой равносильной форме:

$$(m!)^{r-1}(p^r+1)\cdots(p^r+m-1) > (p+1)^r \cdots (p+m-1)^r \Leftrightarrow \\ 2^{r-1}(p^r+1)\cdots m^{r-1}(p^r+m-1) > (p+1)^r \cdots (p+m-1)^r \quad (5)$$

Неравенство (5) является следствием неравенства

$$k^{r-1}(p^r+k-1) > (p+k-1)^r, p \geq 2, r \geq 2, k \geq 2. \quad (6)$$

Это неравенство доказывается индукцией по r . Если $r=2$, то

$$k(p^2+k-1) - (p+k-1)^2 = (k-1)(p-1)^2 > 0.$$

Предположим, что имеет место (6). Докажем, что

$$k^r(p^{r+1}+k-1) > (p+k-1)^{r+1}. \text{ В самом деле,}$$

$$\begin{aligned} k^r(p^{r+1}+k-1) &= k^{r-1}(p^r+k-1) + [k^r(p^{r+1}+k-1) - k^{r-1}(p^r+k-1)] = \\ &= k^{r-1}(p^r+k-1) + k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2) + k^{r-1}((k-1)(p-1)(p^r-1) - \\ &= (k-1)(p-1)) = k^{r-1}(p^r+k-1) + k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2) + \\ &= k^{r-1}(k-1)(p-1)(p^r-2) > k^{r-1}(p^r+k-1) + k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2) > \\ &= (p+k-1)^{r+1}. \end{aligned}$$

ССЫЛКИ

- [1] The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions, 1938-1964. *The Mathematical Association of America*, 1985.

УДК 532.59

ЕНЕРГІЯ ХВИЛЬОВОГО РУХУ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

О.В. АВРАМЕНКО, В.В. НАРАДОВИЙ

Рассмотрена новая задача об исследовании волновых движений в двухслойной жидкости конечной глубины со свободной поверхностью. Выполнена оценка энергии волнового движения в зависимости от геометрических параметров

системы. Правильность полученных результатов подтверждена сравнением с классическими случаями.

We consider a new problem of the study of wave motions in a two-layer fluid of finite depth with a free surface. The estimation of the energy of the wave motion as a function of the geometric parameters of the system are performed. The correctness of the results is confirmed by comparison with the classical cases.

Вступ. Дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль у різноманітних гідродинамічних системах активно проводиться на даному етапі розвитку механіки суцільних середовищ. У більшості робіт проведений детальний аналіз умов проходження хвиль на основі отриманих дисперсійних співвідношень для лінійної постановки задачі, розв'язки якої приводять до моделі мілкої води або до моделі малих відхилень.

Черкесов Л.В. у [12] провів дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в однорідній та неоднорідній системах в залежності від ряду параметрів вказаних систем в наближенні мілкої води. Ним було досліджено у лінійному наближенні вплив в'язкості на рух довгих хвиль в двошаровій рідині скінченної глибини з вільною поверхнею та з кришкою. Проаналізовано вплив капілярності і періодичних збурюючі тисків на деформацію просторових поверхневих хвиль. Також досліджено рух та деформацію хвиль типу цунамі у прибережних зонах.

У монографії [3] рядом авторів розглянуто теоретичні та експериментальні дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль для однорідних та неоднорідних рідин. Доведені теореми існування та єдності розв'язків задачі Коші – Пуассона, а також наведені обґрунтування двох наближених теорій – лінійної і «мілкої води». Зокрема, Овсянніковим розглянуті лінійні задачі поширення хвиль в системах «шар з вільною поверхнею», «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею», «шар з твердим дном – шар з кришкою». Також приведений вивід ряду математичних моделей другого наближення за Лагранжем для різних типів хвильового руху. Отримані розв'язки другого наближення за Лагранжем для

системи «шар з твердим дном – шар з кришкою», а також проаналізовані умови проходження хвиль в системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» на основі аналізу дисперсійного співвідношення.

Аналізом поширення хвиль–убивць та хвиль типу цунамі активно займається Доценко С. Ф. Зокрема, в роботі [1] на основі даних спостережень в північно-західній частині Чорного моря виконано аналіз аномальних вітрових хвиль (хвиль убивць). В [2] у рамках нелінійної теорії методом скінченних різниць виконано аналіз розповсюдження хвиль цунамі з басейну в прямолінійний канал сталого прямокутного поперечного перерізу. Виявлено, що максимальна висота хвиль у каналі реалізується для осередків цунамі, розташованих на материковому схилі навпроти входу в канал.

У роботі [10] Стеценком О.Г. розглянуто задачу визначення гідродинамічних сил реакції довільного стійко стратифікованого ідеального середовища на стаціонарний рух плоского точкового вихроджерела, одержано загальні вирази для складових гідродинамічної сили, розроблено альтернативний метод визначення додаткової поздовжньої складової сили - хвильового опору, який ґрунтується на використанні рівняння енергії збуреного руху середовища. Як ілюстрацію представлено відповідні лінійні задачі для безмежних двошарового та лінійно стратифікованого середовищ.

У роботі [14] Камасою та Віотті досліджується нова модель внутрішніх хвиль, які описуються рівнянням Ейлера для неперервно стратифікованої нестисливої рідини у наближенні Бусинеска. Отримані розв'язки поширюються на двошарові системи неперервної стратифікації, а також охоплюють нетривіальні особливості внутрішньої структури пікноклину.

Задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого півпростору і рідкого шару над ним вивчалась Селезовим І. Т. і Авраменко О. В. у [9]. У наступних публікаціях цими авторами досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів в системі "шар - півпростір" методом багатомасштабних розвинень до третього порядку. У

статтях, що опубліковані останнім часом, розглянуті різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів [8]. Також виведене еволюційне рівняння для хвильових чисел близьких до критичного [6], досліджено стійкість розв'язків вказаних рівнянь [7]. Області резонансу другої гармоніки, напрямок поширення хвиль, форма хвильового пакету в системі "шар - півпростір" описані в статті [6]. Останні дослідження показали, що однією з причин нестійкості хвильових пакетів можуть бути також малі збурення, які генерують капілярно-гравітаційні хвилі, обумовлені поверхневим натягом. Не випадково все більше публікацій присвячено поширенню хвильових пакетів у рідких середовищах з урахуванням поверхневого натягу [6, 10, 13].

Постановка задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 . Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z = \eta_0(x, t)$. При розв'язанні враховується сила поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1).

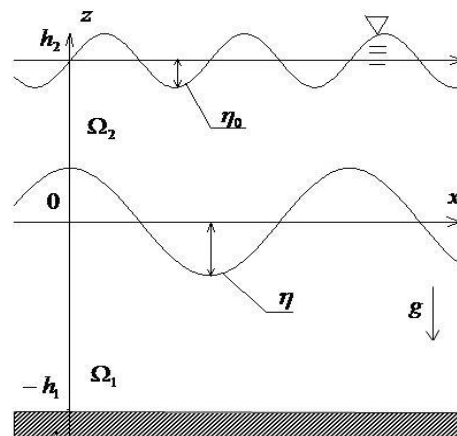


Рис 1. Постановка задачі

Математична постановка лінійної задачі має наступний вигляд. Швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням

$$\varphi_{11,xx} + \varphi_{11,zz} = 0 \text{ в } \Omega_1,$$

$$\varphi_{21,xx} + \varphi_{21,zz} = 0 \text{ в } \Omega_2,$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\eta_{1,t} - \varphi_{11,z} = 0 \text{ на } z = 0,$$

$$\eta_{1,t} - \varphi_{21,z} = 0 \text{ на } z = 0, \quad (1)$$

$$\eta_{01,t} - \varphi_{21,z} = 0 \text{ на } z = h_2,$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\varphi_{11,t} - \rho\varphi_{21,t} + (1-\rho)\eta_1 - T\eta_{1,xx} = 0 \text{ на } z = 0,$$

$$\varphi_{21,t} + \eta_{01} - T_0\eta_{01,xx} = 0 \text{ на } z = h_2,$$

умова непротікання на дні

$$\varphi_{11,z} = 0 \text{ на } z = -h_1.$$

У роботах [4-5] для цієї задачі отримано дисперсійне рівняння у вигляді

$$\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho\omega^2 \left(\frac{\omega^2 - (k + T_0k^3) \operatorname{cth}(kh_2)}{\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0k^3)} \right) = (1-\rho)k + Tk^3 \quad (2)$$

Дисперсійне рівняння (2) має дві пари коренів $\pm\omega_{1,3}$ та $\pm\omega_{2,4}$, які відповідають частотам внутрішніх та поверхневих хвиль. Для кожної пари коренів можна записати незалежні розв'язки для задачі (1).

для ω_1

$$\eta_1^{(1)} = A \sin(kx - \omega_1 t),$$

$$\eta_{01}^{(1)} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} A \sin(kx - \omega_1 t),$$

$$\varphi_{11}^{(1)} = -\frac{A}{\omega_1 \operatorname{ch}(kh_1)} \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_1 t), \quad (3)$$

$$\varphi_{21}^{(1)} = -\frac{A\omega_1 \operatorname{th}(kh_1) \left(\omega_1^2 \operatorname{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z)) \right)}{\left(\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2) \right)^2} \cos(kx - \omega_1 t);$$

ДЛЯ ω_2

$$\eta_{11}^{(2)} = \frac{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}{\omega_2^2} B \sin(kx - \omega_2 t),$$

$$\eta_{01}^{(2)} = B \sin(kx - \omega_2 t),$$

$$\varphi_{11}^{(2)} = -\frac{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}{\omega_2^3 \operatorname{ch}(kh_1)} B \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_2 t), \quad (4)$$

$$\varphi_{21}^{(2)} = -\frac{B \operatorname{th}(kh_1) \left(\omega_2^2 \operatorname{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z)) \right)}{\omega_2 \left(\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2) \right)} \cos(kx - \omega_2 t),$$

де A - амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $\eta_{11}^{(1)}$, B - амплітуда поверхневої прогресивної хвилі $\eta_{01}^{(2)}$. Тут $\eta_{01}^{(1)}$ є поверхневою хвилею-відгуком на внутрішню хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 . Відповідно $\eta_{11}^{(2)}$ є внутрішньою хвилею-відгуком на поверхневу хвилю $\eta_{01}^{(2)}$ з частотою ω_2 .

Аналіз енергії хвильового руху. Енергію, яку переносять внутрішня та поверхнева хвилі, будемо досліджувати згідно [11]. Розглянемо енергію, яку переносять за період τ двовимірні прогресивні хвилі, що задаються розв'язками (3) та (4), через площину $x = \text{const}$ на поверхні контакту та на вільній поверхні. Тоді мають місце формули

$$E_{vn} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (5)$$

$$E_{pov} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (6)$$

де E_{vn} - енергія, яку переносить внутрішня хвиля, E_{pov} - енергія, яку переносить поверхнева хвиля. За формулами (5) та (6) ми можемо обчислити енергію, яку переносять внутрішня та поверхнева хвилі, при цьому відхилення поверхні контакту та вільної поверхні задаються наступним чином

$$\eta_1 = \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(2)}, \quad \eta_{01} = \eta_{01}^{(1)} + \eta_{01}^{(2)}. \quad (7)$$

Отримані результати будемо порівнювати з розрахунком енергії, що переносить хвиля в гідродинамічній системі «шар з вільною поверхнею», який виконано в [11]. Розв'язки цієї задачі в лінійній постановці мають наступний вигляд

$$\zeta = C \sin(\omega t - kx),$$

$$\varphi = \frac{C}{\omega \operatorname{ch}(kh)} \operatorname{ch}(k(z+h)) \cos(\omega t - kx). \quad (8)$$

Енергія, яку переносить хвиля у такій системі, обчислюється наступним чином

$$E_{kl} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz. \quad (9)$$

Розглянемо залежності енергії від товщини нижнього шару h_1 у двошаровій системі (5) та (6) та залежність енергії від товщини шару h у одношаровій системі (7). Для порівняння розглянемо один з граничних випадків, за яких двошарова система вироджується у одношарову. Цей випадок описується рівністю густин $\rho_1 = \rho_2$, $\rho = 1$, при цьому товщина шару $h = h_1 + h_2$ та амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0$. У цьому випадку отримуємо один однорідний шар, обмежений згори вільною поверхнею. На рис. 2 показана залежність E_{vn} , E_{pov} , $E_{vn} + E_{pov}$ та E_{kl} від товщини нижнього шару для наступних параметрів $k = 0.01$, $T = T_0 = 0$, $h_2 = 1$, амплітуда поверхневої прогресивної хвилі $B = 0.1$.

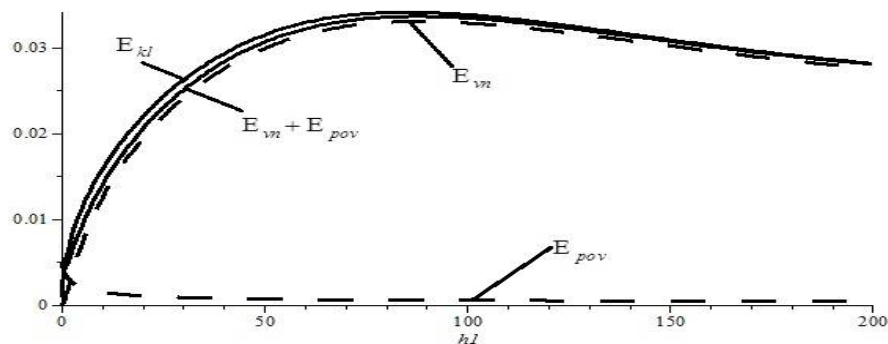


Рис. 2. Залежність E_{vn} , E_{pov} , $E_{vn} + E_{pov}$ та E_{kl} від товщини нижнього шару h_1 .

Як помітно з рис. 2, при збільшенні товщини нижнього шару енергія, що переноситься поверхневою хвилею, спадає. При цьому сума внутрішньої та поверхневої енергії (енергія системи) $E_{vn} + E_{pov}$ наближається до енергії E_{kl} однорідного шару товщини $h = h_1 + h_2$. Отже, для довгих хвиль малої амплітуди сума енергій, що переносяться внутрішньою та поверхневою хвилями наближається до енергії, що відповідає поверхневій хвилі в системі «шар з вільною поверхнею» у випадку, коли $h_1 \rightarrow \infty$.

Висновки. Виконано постановку задачі про поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» в лінійному наближенні, наведені формули, за якими обчислюється енергія внутрішніх та поверхневих хвильових рухів. Виконано оцінку енергії хвильового руху в залежності від геометричних параметрів двошарової гідродинамічної системи. Достовірність отриманих результатів підтверджена порівнянням з відомими класичними випадками.

ПОСИЛАННЯ

- [1] Доценко С. Ф., Иванов В.А., Побережный Ю.А. Связь образования волн-убийц и метеорологических условий в северо-западной части Черного моря. *Доповіді НАН України*, 2010. - №12.- С. 105 -109.
- [2] Доценко С.Ф., Санникова Н.К.В. Анализ двумерного распространения волн цунами из эллиптического очага в прямолинейный канал . *МГИ НАН Украины*, 2011.- С 419 – 428.
- [3] Овсянников В.Л., Макаренко Н.И., Налимов В.И. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.*- Новосибирск: Наука, 1985.- 318 с.
- [4] Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю.В., Нарadowый В.В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью . *Мат. методи та фіз.-мех. поля.*- 2009. - 52, №1. - С. 72-83.
- [5] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Нарadowый В.В. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью *Динамические системы.*- 2011.- Т.1(29), №1.-С. 53-68.
- [6] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Нелинейное распространение волновых пакетов при околоритических волновых числах в кусочно-неоднородной по глубине жидкости *Теоретическая и прикладная механика.*- 2000.- Вып.31.- С. 151-157.
- [7] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред. *Прикладна гідромеханіка.*- 2002.- Т.4(76),М.- С. 3-13.

[8] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения. *Прикладна гідромеханіка*.- 2001.- Т.3(75), N4.- С. 38- 46.

[9] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околоритических волновых числах. *Динамические системы*.- 2001.- Вып. 17.- С. 58-67.

[10] Стеценко О.Г. Стационарный рух точкового вихору в шарі скінченної товщини стратифікованого середовища, обмеженого твердими границями. *Приклад. гідромеханіка* . — 2010. — 12, N 1. — С. 68-75.

[11] Тарапов И.Е. *Механика сплошной среды*. В 3 ч. Ч. 3: *Механика невязкой жидкости*.- Харьков: Золотые страницы, 2005.- 332 с.

[12] Черкесов Л.В. *Гидродинамика поверхностных и внутренних волн*.- К.: Наук, думка, 1976.- 364 с.

[13] Avramenko O., Naradovyy V.. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*.- 2012. – Vol. 1.

[14] Camassa R., Viotti C. A model for large-amplitude internal waves with finite-thickness pycnocline. *Acta Appl. Math.*- 2012.- № 1.- P. 75 – 84.

УДК 519.21

ВАЖЛИВІ МОМЕНТНІ ОЦІНКИ ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ

К.С. АКБАШ

Установлено обмеженість моментів нормованого максимуму.

The limitedness of moments of normalized maximum are established.

Нехай ξ випадкова величина в \mathcal{R}^1 з функцією розподілу $F(x)$, ξ_i незалежні копії ξ , $z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$.

Покладемо

$$\tau(F) = \sup(x : F(x) < 1),$$

$$\varphi(y) = \inf \left(x \geq 1 : \frac{1}{1 - F(x)} \geq y \right), \quad 1 \leq y < \infty, \quad (1)$$