УДК 519.1

О ДЕЛИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ПРОСТОЕ ЧИСЛО

Ю.И. ВОЛКОВ, Н.М. ВОЙНАЛОВИЧ

Ми отримали вираз для числа поліноміальних коефіцієнтів, які не діляться на просте число *p,* в розкладі $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$.

We obtain an expression for the number of multinomial coefficients which are not divisible by a prime *p* in the expansion $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$.

Введение

В 1958 году в журнале American Mathematical Monthly появилась задача (Problem E1288): доказать, что количество нечетных биномиальных коэффициентов в каком-нибудь конечном биномиальном разложении есть степень двойки.

Тогда же появилась и более общая задача (Problem 4723): заданы натуральное число n и простое число $p,$ получить выражение для количества биномиальных коэффициентов, которые не делятся на $p.$ Решение оказалось таким: запишем число n в системе счисления с основанием p, пусть $\{n_i\}$ цифры в полученной записи. Тогда количество биномиальных коэффициентов, которые не делятся на p, задается формулой $\prod(n_i+1)$. (см. [1], р.424).

Целью настоящей статьи является получение для полиномиальных коэффициентов аналога упомянутого решения.

Основной результат

Теорема. *Пусть p простое число,* $n=(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_0})_p=n_0+n_1p+\cdots+n_rp^r$. *Тогда количество полиномиальных коэффициентов в разложении* $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n, m\geq 2,$ *которые не делятся на p, задается формулой*

$$\binom{n_0+m-1}{n_0}\cdot\binom{n_1+m-1}{n_1}\cdot\ldots\cdot\binom{n_r+m-1}{n_r}.$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^p \equiv (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_m^p)(\bmod p). \qquad (1)$$

Действительно, поскольку

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^p \equiv \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=p \\ k_1\geq 0,\ldots,k_m\geq 0}} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!} a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m} \ ,$$

то только m коэффициентов, определяемых решениями уравнения $k_1 + \cdots + k_m = p$, (p,0,…,0), (0,p,0,…,0),…, (0,…,0,p), не делятся на p, а это влечет соотношение (1).

Пусть теперь $q = p^s, s \in N$. Тогда

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^q \equiv (a_1^q + a_2^q + \cdots + a_m^q)(\bmod p) \ . \qquad (2)$$

Для s=1 соотношение (2) доказано. Предположим, что (2) имеет место. Докажем, что (2) будет иметь место и для показателя s+1.

Имеем, поскольку $p^{s+1} = qp$,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^{qp} = ((a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^q)^p \equiv (a_1^q + a_2^q + \cdots + a_m^q)^p (\bmod p),$$

отсюда, в силу (1),

$$(a_1^q + a_2^q + \cdots + a_m^q)^p \equiv (a_1^{qp} + a_2^{qp} + \cdots + a_m^{qp})(\bmod p),$$

а отсюда

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^{qp} \equiv (a_1^{qp} + a_2^{qp} + \cdots + a_m^{qp})(\bmod p),$$

что доказывает правильность соотношения (2).

Дальше получим:

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^{n_0+n_1p+\cdots+n_rp^r} \equiv \\ &(a_1^{p^r} + \cdots + a_m^{p^r})^{n_r} \cdots (a_1^p + \cdots + a_m^p)^{n_1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^{n_0}\end{aligned} \ . \qquad (3)$$

Если множители в (3) разложить по полиномиальной формуле, то получим r+1 множитель, каждый из них состоит из $\binom{n_i + m - 1}{n_i}$,

$i=0,1,\ldots,r,$ слагаемых. Раскрывая дальше скобки, получим выражение в котором будет $\prod_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{r}}\binom{n_i+m-1}{n_i}$ слагаемых, которые не делятся на p.

Следствия.

Следствие 1. Если p=2, то n_i это нули или единицы, поэтому $\prod_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{r}}\binom{n_i+m-1}{n_i}=m^j$, где j количество единиц в двоичном разложении числа n, то есть, m^{j} это количество нечетных коэффициентов в разложении $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$. В частности, если m=2, то получим решение упомянутой во введении первой задачи.

Следствие 2. Пусть $p\geq 3, m=2$. Тогда количество биномиальных коэф-фициентов, которые не делятся на p, задается формулой: $(n_0+1)\cdots(n_r+1)$, то есть, получаем решение упомянутой во введении второй задачи.

Следствие 3. Пусть $n=p^r-1$.Тогда $n_0=n_1=\cdots=n_{r-1}=p-1$. Следовательно, количество полиномиальных коэффициентов в разложении $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$, которые не делятся на p, задается формулой $\left[\binom{p+m-2}{p-1}\right]^r=\left[\binom{p+m-2}{m-1}\right]^r$. В частности, если p=2, m=2, то в разложении бинома $(a_1+a_2)^{2^r-1}$ все коэффициенты будут нечетными.

Следствие 4. Если m>2, r>1, то в разложении $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^{p^r-1}$ по крайней мере один полиномиальный коэффициент делится на p.

Это следствие вытекает из неравенства

$$\left[\binom{p+m-1}{m}\right]^r<\binom{p^r+m-1}{m}, p\geq 2, r\geq 2, m\geq 2. \qquad (4)$$

Докажем неравенство (4).

Используя формулу для вычисления биномиальных коэффициентов, перепишем (4) в такой равносильной форме:

$$(m!)^{r-1}(p^r+1)\cdots(p^r+m-1)>(p+1)^r\cdots(p+m-1)^r \Leftrightarrow$$

$$2^{r-1}(p^r+1)\cdots m^{r-1}(p^r+m-1)>(p+1)^r\cdots(p+m-1)^r \qquad (5)$$

Неравенство (5) является следствием неравенства

$$k^{r-1}(p^r+k-1)>(p+k-1)^r, p\ge 2, r\ge 2, k\ge 2. \qquad (6)$$

Это неравенство доказывается индукцией по r. Если r=2, то

$k(p^2+k-1)-(p+k-1)^2=(k-1)(p-1)^2>0.$

Предположим, что имеет место (6). Докажем, что

$k^r(p^{r+1}+k-1)>(p+k-1)^{r+1}$. В самом деле,

$$k^r(p^{r+1}+k-1)=k^{r-1}(p^r+k-1)+[k^r(p^{r+1}+k-1)-k^{r-1}(p^r+k-1)]=$$
$$k^{r-1}(p^r+k-1)+k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2)+k^{r-1}((k-1)(p-1)(p^r-1)-$$
$$(k-1)(p-1))=k^{r-1}(p^r+k-1)+k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2)+$$
$$k^{r-1}(k-1)(p-1)(p^r-2)>k^{r-1}(p^r+k-1)+k^{r-1}(p^r+k-1)(p+k-2)>$$
$$(p+k-1)^{r+1}.$$

ССЫЛКИ

[1] The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions, 1938-1964. *The Mathematical Association of America,* 1985.

УДК 532.59

ЕНЕРГІЯ ХВИЛЬОВОГО РУХУ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

О.В. АВРАМЕНКО, В.В. НАРАДОВИЙ

Рассмотрена новая задача об исследовании волновых движений в двухслойной жидкости конечной глубины со свободной поверхностью. Выполнена оценка энергии волнового движения в зависимости от геометрических параметров