УДК 512.552.1

# НАПІВДОСКОНАЛІ НАПІВДИСТРИБУТИВНІ КУСКОВІ ОБЛАСТІ

Ю. В. Яременко

Розглянуто властивості напівдосконалих напівдистрибутивних кускових областей.

There we describe the property of semi-perfect semi-distributive piecewise domains.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Модуль $M$ називається *дистрибутивним,* якщо для будь-яких підмодулів $K$, $L$, $N$ справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$ [1].

Камілло [1] довів, що модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли будь-який його фактормодуль містить в своєму цоколі не більше одного екземпляра кожного простого модуля, тобто цоколь будь-якого фактормодуля не містить квадратів.

*Цоколь* – сума всіх мінімальних підмодулів модуля, тобто простих модулів.

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Пряма сума дистрибутивних модулів називається *напівдистрибутивним модулем*.

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва)*, якщо воно є напівдистрибутивним правим (лівим) модулем над собою.

Напівдистрибутивне справа і зліва кільце називається *напівдистрибутивним.*

Елемент $e^2=e\in A$ називається *ідемпотентом*. Два ідемпотенти $e$ і $f$ називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Рівність $1=e_1+\ldots+e_n$, будемо називати розкладом одиниці кільця $A$.

Твердження 1 [2,с.9]. *Якщо* $1=e_1+\ldots+e_n$ *- розклад одиниці кільця A , то* $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_i A \ (A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ *− розклад кільця A в пряму суму правих (лівих) ідеалів* $e_iA$ $(Ae_i)$.

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця $A$ і $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Елементи із $e_iAe_j$ ми будемо позначати через $a_{ij}$. Тоді будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці $(a_{ij})$. Кільце $A$ зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [3, с.31]

Модуль $M$ називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів є лінійно впорядкованою.

Модуль $M$ називається *нетеровим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Модуль $M$ називається *артиновим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить мінімальний елемент.

Кільце $A$ називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

*Радикалом Джекобсона R кільця A* називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Кільце $A$ називається *локальним*, якщо в нього всього один максимальний правий ідеал.

В цьому випадку цей ідеал є радикалом Джекобсона $R$ кільця $A$. Тому у кільця $A$ всього один максимальний лівий ідеал.

Ідемпотент $e\in A$ називається *локальним ідемпотентом*, якщо кільце $eAe$ локальне.

Кільце $A$ називається *напівлокальним*, якщо факторкільце $\overline{A} = A/R$ артинове справа.

*Ідемпотенти можна піднімати за модулем R,* якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці $A$ конгруентний з $u$ за модулем $R$).

Напівлокальне кільце $A$ називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона $R$ кільця $A$ [4].

Напівдосконале кільце $A$ називається *зведеним,* якщо факторкільце $A / R$ є прямим добутком тіл.

Модуль $P$ називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму $\varphi$ модуля $M$ на модуль $N$ ($\varphi : M \to N$) і для будь-якого гомоморфізму $\psi$ : $P \to N$ існує гомоморфізм $h$: $P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$.

В силу теореми Морiти [5] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця $A$ в пряму суму головних $A$-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце $A$ розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проективних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$ .

Підмодуль $N$ модуля $M$ називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля $X$ модуля $M$.

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля $M$, якщо існує епіморфізм $\varphi: P \to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ - косуттєвий підмодуль в $P$.

**Теорема 1 [4] (Басс).** *Наступні умови рівносильні для кільця A:*

*(а) кільце A напівдосконале;*

*(б) будь-який циклічний A-модуль має проективне накриття.*

Нехай $A$ – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона $R$; $P_1,\ldots P_s$ – всі попарно неізоморфні головні $A$-модулі. Розглянемо проективне накриття модуля $P_iR$ $(i=1,\ldots,s)$, яке позначимо $P(P_iR)$ (воно завжди існує згідно теореми 1). Нехай $P(P_iR)=\bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}$ ($P^n$ – пряма сума $n$ екземплярів модуля $P$, $P^0=0$). Співставимо головним модулям $P_1,\ldots,P_s$ точки $1,\ldots,s$ і з'єднаємо точку $i$ з точкою $j$ $t_{ij}$ стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця $A$ і позначається $K(A)$.

**Теорема 2 [6].** *Напівдосконале кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf-модулем (ланцюговим лівим eAe-модулем).*

Кільце називається *первинним*, якщо добуток довільних двох ненульових ідеалів не дорівнює нулю.

Ідеал $J$ кільця $A$ називається *первинним*, якщо $J \neq A$ і для будь-яких ідеалів $L$ і $N$ кільця $A$ з включення $LN \subset J$ випливає, що або $L \subset J$, або $N \subset J$.

*Первинним радикалом* $I$ кільця $A$ називається перетин усіх первинних ідеалів кільця $A$.

Напівдосконале кільце $A$ називається *кусковою областю*, якщо будь-який ненульовий гомоморфізм нерозкладних проективних $A$-модулів є мономорфізмом.

Кускова область $A$ має наступний двосторонній пірсовський розклад [7]:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_t \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

де $A_1, \ldots, A_t$ – первинні кільця і первинний радикал $I$ кільця $A$ має вигляд

$$I=\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Тому $\overline{A}=A/I\cong A_1\times\cdots\times A_t$.

**Лема 1 [8].** *Кускова область A як абелева група розкладається в пряму суму кільця $A_0$, ізоморфного $\overline{A}$, і первинного радикала I: $A=A_0\oplus I$.*

Нехай $A$ – кускова нетерова напівдосконала напівдистрибутивна область. Вважатимемо, що вона є зведеним нерозкладним кільцем.

**Твердження 2 [8].** *Якщо e – ненульовий ідемпотент кускової напівдосконалої напівдистрибутивної області, то кільце eAe також є кусковою напівдосконалою напівдистрибутивною областю.*

**Теорема 3 [6].** *Нетерове нерозкладне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з нульовим цоколем є кусковою областю.*

Множина $S$ називається *частково впорядкованою множиною*, якщо на ній задане бінарне відношення $\le$, яке задовольняє наступним аксіомам:

(1) $a\le a$ (рефлексивність);

(2) $a\le b$ і $b\le c$, то $a\le c$ (транзитивність);

(3) $a\le b$ і $b\le a$, то $a=b$ (антисиметричність).

**Теорема 4 [9].** *Нерозкладна кускова артинова напівдистрибутивна область еквівалентна в сенсі Моріти кільцю B, яке має наступний двосторонній пірсовський розклад:*

$$B=\begin{bmatrix} D & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ 0 & D & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

*де D – тіло, $B_{ij}$ - одновимірний правий та одновимірний лівий простір над тілом D, причому, якщо $B_{ij}$ та $B_{jk}$ відмінні від нуля, то і $B_{ik}$ відмінне від* *нуля. Сагайдак K(B) є діаграмою зв'язної скінченної частково впорядкованої множини. Навпаки, довільне кільце такого вигляду є кусковою артиновою напівдистрибутивною областю.*

Добуток ідеала $I$ на себе $n$ раз позначається $I^n$ і називається *n-ною степінню ідеала I.*

Ідеал $I$ (двосторонній, односторонній) називається *нільпотентним*, якщо $I^n=0$.

Якщо в кільці немає ненульових нільпотентних ідеалів, то воно називається *напівпервинним*.

*Напівмаксимальним* кільцем називається напівдосконале напівпервинне нетерове справа кільце $A$, у якого для будь-якого локального ідемпотента $e\in A$ кільце $eAe$ є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним).

Кільце *просте,* якщо в ньому немає відмінних від нуля двосторонніх ідеалів.

Ненульовий модуль $M$ називається *простим*, якщо у нього рівно два підмодулі ( сам $M$ і нульовий підмодуль ).

Модуль $M$ називається *напівпростим*, якщо він розпадається в пряму суму простих модулів.

Кільце $A$ називається *напівпростим справа,* якщо воно напівпросте як правий модуль над собою.

**Теорема 5 [6].** *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого напівпервинного нетерова справа кільця A:*

*(a) кільце A – напівдистрибутивне;*

*(б) кільце A є прямим добутком напівпростого артинова кільця і напівмаксимального кільця.*

Розглянемо напівдосконалі напівдистрибутивні кускові області з нетеровою діагоналлю.

Нагадаємо, що фактор-кільце $\overline{A} = A_0 / I$ називається *діагоналлю* кільця *A*.

Будемо вважати, що кільце *A* є кільцем з нетеревою діагоналлю, якщо його діагональ – нетерова справа. У нашому випадку $A/I = A_0$ - кускова напівдосконала напівдистрибутивна нетерова справа область яка є напівпервинним кільцем. Таке кільце, згідно теореми 5, ізоморфне прямому добутку напівпростого артинового кільця і напівмаксимального кільця.

З леми 1 і твердження 2 отримаємо наступну лему.

**Лема 2 [10].** *Якщо е - ненульовий ідемпотент напівдосконалої напівдистрибутивної кускової області А з нетеровою діагоналлю, то кільце еАе також є напівдосконалою напівдистрибутивною кусковою областю з нетеровою діагоналлю.*

**Теорема 6.** *В кожній напівдосконалій напівдистрибутивній кусковій області А з нетеровою діагоналлю виконується умова Оре, тобто всяке таке кільце володіє класичним кільцем часток* $\widetilde{A}$*, яке є артиновою напівдистрибутивною кусковою областю.*

Доведення будемо проводити індукцією по числу *t* нерозкладних кілець, в прямий добуток яких розкладається діагональ $A/I$ кускової області *A* з нетеровою діагоналлю.

При *t = 1* кільце *A* еквівалентне в сенсі Моріти або тілу, або первинному напівмаксимальному кільцю. Кожне таке кільце за теоремою Голді володіє класичним кільцем часток.

Нехай $1 = q_1 + ... + q_{t-1} + q_t$ - розклад *1* $\in$ *A* в суму попарно ортогональних ідемпотентів, причому $A/I \cong A_0 = q_1Aq_1 \times ... \times q_{t-1}Aq_{t-1} \times q_tAq_t$.

Всякий регулярний елемент *r* кільця *A* буде мати вигляд $r = r_1 + ... + r_{t-1} + r_t + u$, де $u \in I$ і $r_1, ..., r_{t-1}, r_t$ - регулярні елементи кілець $A_1, ..., A_{t-1}, A_t$.

Припустимо, що теорема має місце для кускової області $A$ , діагональ якої розпадається в прямий добуток *t-1* нерозкладних кілець.

Позначимо $h_1 = q_1 + ... + q_{t-1}, h_2 = q_t$. Покажемо, що в кільці $A$ виконується умова Оре, тобто покажемо, що для кожного $a \in A$ і для кожного регулярного $r \in A$ існує регулярний елемент $y \in A$ і $b \in A$ такі, що $ay=rb$.

Розглянемо двосторонній пірсовський розклад кільця $A$ відносно розкладу $1 = h_1 + h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} h_1Ah_1 & h_1Ah_2 \\ 0 & h_2Ah_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $R_i$ – радикал Джекобсона кільця $A_i = h_iAh_i\,(i = 1,2)$, $X = h_1Ah_2$.

Представимо елементи $a$ і $r$ в матричному вигляді:

$$a = \begin{pmatrix} h_1ah_1 & h_1ah_2 \\ 0 & h_2rh_2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} h_1rh_1 & h_1rh_2 \\ 0 & h_2rh_2 \end{pmatrix}.$$

Будемо шукати елемент $b$ у вигляді $b = \begin{pmatrix} b_1 & x \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, де $b_1=h_1bh_1$, $b_2=h_2bh_2$, $x=h_1bh_2$, а елемент $y$ у діагональному вигляді: $y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$, де $y_i = h_iyh_i (i=1,2)$. З рівності $ay=rb$ отримаємо $h_1ah_1y_1 = h_1rh_1b_1, h_2ah_2y_2 = h_2rh_2b_2, h_1ah_2y_2 = h_1rh_1x + h_1rh_1b_2$. Елементи $y_1$, $b_1$, і $y_2$, $b_2$ існують за припущенням індукції. Запишемо останню рівність у вигляді $h_1rh_1x = h_1ah_2y_2 - h_1rh_2b_2$. **(4)**

Можливі два випадки:

1) Кільце $A$ ізоморфне $M_n(D)$, де $D$ - тіло;

2) кільце $A$ є первинним напівмаксимальним кільцем $A = \{(a_{ij}), \vartheta\}$.

У випадку 1) $X$ є скінченновимірним правим векторним простором над тілом $D$, звідки випливає можливість розв’язання рівняння (4) відносно $x$.

У випадку 2) елементи $y_2$ і $b_2$ множимо на матрицю $\pi^m E$ і можна вважати, що права частина рівності (4) лежить в $XR_2^m$ при будь-якому наперед заданому степені *m*. Це знову дозволяє підібрати елемент *x*, що задовольняє рівняння (4). Тому в кільці *A* виконується умова Оре і воно володіє класичним кільцем часток $\widetilde{A}$. Таким чином кільце *A* є артиновою напівдистрибутивною кусковою областю, яка, згідно теореми 5, еквівалентна в сенсі Моріти кільцю *B*, що має двосторонній пірсовський розклад (3).

**ПОСИЛАННЯ**

[1] Camillo V.P. (1975). Distributive modules. *J.Algebra*. 36, № 1, 16-25.

[2] Кириченко В.В. (1981). *Кольца и модули.* – К: Из-во Киев. ун-та.

[3] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. (1980). *Конечномерные алгебры.* – К.: Вища школа.

[4] Bass H. (1960). Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 95, 466-488.

[5] Morita K. (1958). Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*. **6,** 83-142.

[6] Кириченко В.В., Хибина М.А. (1993). Полусовершенные полудистрибутивные кольца. *Сб. «Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры».* – К.: Ин-т математики, 457-480.

[7] Gordon R., Small L.W. (1972). Picewise domains. *J.Algebra*. 23, № 3, 553-564.

[8] Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. (1993). Полусовершенные кольца и их колчаны. *Сб. «Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры».* – К.: Ин-т математики, 438-456.

[9] Кириченко В.В., Могилёва В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. (1995). Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области. *Сб. «Алгебраические исследования».* – К.: Ин-т математики, 33-65.

[10] Яременко Ю.В. (2001). Полусовершенные полудистрибутивные кусочные области. *Доповіді НАН України.* 3, 31-34.