УДК 517.5

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Л.О. Чернецька

При помощи метода обобщенных моментных избражений В.К.Дзядыка построены двомерные аппроксиманты Паде.

В теорії раціональної апроксимації аналітичних функцій одну з центральних ролей відіграють так звані апроксиманти Паде, які є природними узагальненнями многочленів Тейлора в тому розумінні, що вони здійснюють найкращі локальні раціональні наближення функцій.

Означення 1 (див. [1, с. 5]). Раціональна функція

$$[M/N]_f(z)=\frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, Q_N(0)=1,$$

де P_M та Q_N – алгебраїчні многочлени степенів $\le M$ та $\le N$ відповідно, є апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ формального степеневого ряду

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \qquad (1)$$

якщо

$$f(z)-[M/N]_f(z)=O(z^{M+N+1}) \text{ при } z\to 0,$$

тобто розвинення раціональної функції $[M/N]_f(z)$ у степеневий ряд співпадає з розвиненням (1) до члена, що містить z^{M+N}, включно.

Ці апроксиманти названі на честь французького математика Анрі Паде, який першим почав їх систематичне вивчення (1892 – 1907 рр.), хоча їх запровадження і окремі результати були відомі задовго до нього.

Хоча питанням апроксимації Паде займаються вже по суті кілька століть, його багатовимірна версія розглядається лише з початку сімдесятих років XX-го століття.

У даній роботі двовимірні апроксиманти Паде будуються за допомогою методу узагальнених моментних зображень В.К.Дзядика, поширеного на випадок двовимірних числових послідовностей.

Наведемо означення двовимірного узагальненого моментного зображення.

Означення 2. Говоритимемо, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ справджується узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$. [2, c. 62], якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а у просторі Y– двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, k, j, m, n \in Z_+. \tag{2}$$

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{3}$$

Для рядів вигляду (3) можна визначати раціональні апроксиманти за різними схемами (див. [3, c. 323]). Задача полягає в тому, щоб зафіксувати певні обмежені області N і D з Z_+^2 та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_N(z,w) = \sum_{(k,m)\in N} p_{k,m} z^k w^m,$$

$$Q_D(z,w) = \sum_{(k,m)\in D} q_{k,m} z^k w^m$$

таким чином, щоб у розвиненні

$$f(z,w) - \frac{P_N(z,w)}{Q_D(z,w)} = \sum_{k,m=0}^{\infty} e_{k,m} z^k w^m$$

якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ при $(k,m)\in E,$ де E – область співпадання (деяка обмежена множина цілочисельної двовимірної решітки Z_+^2). Як і у випадку одновимірних апроксимацій Паде, побудова таких многочленів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому в загальному випадку має справджуватися рівність

$$\dim(E)=\dim(N)+\dim(D)-1.$$

Принаймні, в кожному невиродженому випадку можна домогтися, щоб виконувалася нерівність

$$\dim(E)\geq\dim(N)+\dim(D)-1.$$

Для побудови зображень вигляду (2) зручно використати той факт, що задачу про двовимірні узагальнені моментні зображення можна сформулювати в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори X та Y є нормованими, і у просторі X існують комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_1,A_2:X\to X$ такі, що

$$A_1x_{k,m}=x_{k+1,m},$$
$$A_2x_{k,m}=x_{k,m+1}$$

при всіх $k,m\in Z_+$. Нехай у просторі Y існують обмежені лінійні оператори $A_1^*,A_2^*:Y\to Y,$ спряжені до операторів A_1 та A_2 відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в тому розумінні, що $\forall x\in X,\forall y\in Y$

$$\langle A_1x,y\rangle=\langle x,A_1^*y\rangle,$$
$$\langle A_2x,y\rangle=\langle x,A_2^*y\rangle.$$

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді

$$s_{k,m}=\langle x_{k,m},y_{0,0}\rangle=\langle A_1^kA_2^mx_{0,0},y_{0,0}\rangle, k,m\in Z_+,$$

і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z,w)=\langle\hat{R}_z(A_1)\hat{R}_w(A_2)x_{0,0},y_{0,0}\rangle, \tag{4}$$

де $\hat{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$ – резольвентна функція оператора A.

Якщо оператори A_1 та A_2 співпадають між собою $A_1 = A_2 = A,$ то зображення (4) набуде вигляду

$$f(z,w) = \langle\, \hat{R}_z(A)\hat{R}_w(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, \tag{5}$$

Лема 1. Для функцій вигляду (5) є справедливим зображення

$$f(z,w) = \frac{zh(z) - wh(w)}{z - w},$$

де $h(z) = \langle\, \hat{R}_z(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle.$

Як аналог теореми В.К.Дзядика [4], для випадку функцій двох змінних встановлено наступний результат.

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд (3) і для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ справджується узагальнене моментне зображення вигляду (2) на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle.$ Якщо при деяких $N_1, N_2 \in \mathrm{N}$ та $M_1, M_2 \in \mathrm{Z}$ існує нетривіальний узагальнений многочлен

$$Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} y_{j,n} \tag{6}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}\rangle = 0 \tag{7}$$

при $(k,m) \in \{(k,m) : (k,m) = (M_1, M_2) + (k_0, m_0), (k_0, m_0) \in \mathrm{H}\},$ де область $\mathrm{H} \subset \mathrm{Z}_+^2$ обмежена графіком деякої функції $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [0, \pi/2],$ і містить рівно $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точку, і при цьому $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} \neq 0,$ то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)}\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m-n} + z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{M_1+y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{M_2+x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m+n} + z^{N_1}w^{N_2}\sum_{(k,m)\in\Gamma_{x,y}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n}\},$$

де $\Gamma_{x,y}=\{(k,m):k\in[0,M_1-1],m\in[0,M_2+x(k)-N_2]\}\cup\{(k,m):k\in[0,M_1+y(m)-N_1],m\in[0,M_2-1]\}$,

$x(k),y(m)-$ деякі функції з Z_+ в Z_+ такі, що $x(k)\ge N_2, y(m)\ge N_1$ для всіх значень k та m,

$$Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^j w^n,$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для всіх

$$\begin{aligned}&(k,m)\in \mathrm{E}=([0,N_1+M_1-1]\times[0,N_2+M_2-1])\cup\{(k,m):k\in[0,N_1+M_1-1],m\in[M_2+N_2,x(k)]\}\cup\\&\cup\{(k,m):m\in[0,M_2+N_2-1],k\in[N_1+M_1,y(m)]\}\cup\\&\cup\{(k,m):k\ge N_1+M_1,m\ge N_2+M_2,(k-N_1-M_1,m-N_2-M_2)\in \mathrm{H}\}.\end{aligned}$$

Розглянемо окремі приклади зображень вигляду (2) та застосуємо їх до побудови раціональних апроксимацій.

Нехай $X=Y=L_2([0,1],d\mu)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією $\mu(t)$, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$.

Визначимо у просторі X два оператори множення на незалежну змінну

$$(A_1\varphi)(t)=(A_2\varphi)(t)=(A\varphi)(t)=t\varphi(t).$$

Нескладно встановити, що резольвентні функції цих операторів можна зобразити у вигляді

$$(\hat{R}_z(A)\varphi)(t)=\frac{\varphi(t)}{1-zt},$$
$$(\hat{R}_w(A)\varphi)(t)=\frac{\varphi(t)}{1-wt}.$$

Таким чином, згідно з лемою 1 функція $f(z,w)$ матиме вигляд

$$f(z,w)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{(1-zt)(1-wt)}=\frac{wh(w)-zh(z)}{w-z}, \tag{8}$$

де $h(z)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}$.

При

$$d\mu(t) = t^{\nu}(1-t)^{\delta} dt, \nu, \delta > -1 \qquad (9)$$

маємо $s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+m} d\mu(t) = \dfrac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\delta+2)}$,

і, отже, отримана функція

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\delta+2)} z^k w^m \qquad (10)$$

з точністю до сталого множника збігатиметься з гіпергеометричним рядом Аппеля

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!} z^k w^m$$

(див. [5, с.219, формула (6)]) при $\alpha = \nu+1, \beta = \beta' = 1, \gamma = \nu+\delta+2.$

Оскільки функція $f(z,w)$ вигляду (8) є симетричною відносно своїх змінних, то має сенс наближати її симетричними агрегатами. Отже, обмежимось випадком $N_1 = N_2 = N.$ Також для спрощення покладемо $M_1 = M_2 = 0$ і не будемо писати верхні індекси (0,0). Для знаходження апроксиманти Паде для $f(z,w)$ вигляду (8) за теоремою 1 нам потрібно побудувати узагальнений многочлен вигляду (6), для якого виконуються умови біортогональності (7). Оскільки $Y_{N,N}(t)$ в даному випадку буде алгебраїчним многочленом степеня $2N$, який ортогональний до многочленів степеня $2N-1,$ то він збігатиметься з точністю до сталого множника з многочленом, ортонормованим на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t),$ а у випадку міри (9) – з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі (див. [6, с.268]).

Зауважимо, що многочлен $Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t)$ при цьому буде ортогональним не лише до $x_{k,m}(t), (k,m) \in ([0,N]\times[0,N]) \setminus \{(N,N)\},$ але і до $x_{k,m}(t)$ при $(k,m) \in \{(k,m) \in \mathrm{Z}_+, k+m \le 2N-1\}.$ Тому при побудові апроксиманти Паде функцій вигляду (8) має сенс вибирати коефіцієнти чисельника з множини

$$\mathrm{N} = \{(k,m): k+m \le 4N-1\} \setminus \{(k,m): k,m \ge N\}.$$

Нехай функція $f(z,w)$ має вигляд (8). Тоді $Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t)$, де $P_{2N}(t)$ – многочлен степеня $2N$, ортонормований на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t)$.

Запишемо його у вигляді

$$P_{2N}(t) = \sum_{i=0}^{2N} p_i^{(2N)} t^i.$$

Отже, маємо

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{j,n}^{(N,N)} t^{j+n} = \sum_{i=0}^{2N} p_i^{(2N)} t^i.$$

З цієї рівності коефіцієнти $c_{j,n}^{(N,N)}, j,n = \overline{0,N}$ можна визначити багатьма способами. Оскільки функція $f(z,w)$ симетрична, нас будуть цікавити тільки симетричні розв'язки.

Виокремимо з них наступний: будемо вибирати коефіцієнти $c_{j,n}^{(N,N)}$ таким чином, щоб на відрізках $j+n=p,$ що лежать у квадраті $[0,N]\times[0,N]$ коефіцієнти були рівними між собою, тобто при $j+n = j_1+n_1$ виконувались рівності $c_{j,n}^{(N,N)} = c_{j_1,n_1}^{(N,N)}$.

У цьому випадку ортогональний многочлен $P_{2N}(t)$ можна розкласти таким чином:

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-j} c_{j,n}^{(N,N)} t^{j+n} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=N-j+1}^{N} c_{j,n}^{(N,N)} t^{j+n} = \sum_{n=0}^{N} t^n \sum_{j=0}^{n} c_{j,n-j}^{(N,N)} + t^{N+1}\sum_{n=0}^{N-1} t^n \sum_{j=0}^{N-n-1} c_{N-j,n+j+1}^{(N,N)}.$$

В результаті отримаємо співвідношення

$$c_{j,n}^{(N,N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{j+n+1} p_{j+n}^{(2N)} & при \quad j+n \le N, \\ \dfrac{1}{2N-j-n+1} p_{j+n}^{(2N)} & при \quad j+n > N. \end{cases} \tag{11}$$

За теоремою 1, поклавши $x(k) = 4N-1-k, y(m) = 4N-1-m,$ побудуємо для функцій вигляду (8) апроксиманти за вказаною схемою.

Встановлено наступний результат.

Теорема 2. Для аналітичної функції $f(z,w)$, що має інтегральне зображення $s_{k,m}=\int_0^1 t^{k+m}d\mu(t)$ при довільному $N\in\mathrm{N}$ раціональні функції

$$\pi_{\mathrm{N},D}(z,w)=\frac{P_N(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)}$$

такі, що

$$Q_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{N-j,N-n}^{(N,N)}z^j w^n,$$

$$P_{\mathrm{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}c_{N-j,N-n}^{(N,N)}s_{k-j,m-n}+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^k w^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m}c_{j,N-n}^{(N,N)}s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N}c_{N-j,n}^{(N_1,N_2)}s_{k-j,m+n}, \tag{12}$$

коефіцієнти $c_{j,n}^{(N,N)},\ j,n=\overline{0,N},$ задовольняють рівність

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{j,n}^{(N,N)}t^{j+n}=\sum_{i=0}^{2N}p_i^{(2N)}t^i,$$

де $p_i^{(2N)}$ – коефіцієнти алгебраїчного многочлена $P_{2N}(t),$ ортонормованого на $[0,1]$ з вагою $d\mu(t),$ матимуть розвинення в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для функції (8) для всіх $(j,n)\in\mathrm{E}=\{(j,n)\in\mathrm{Z}_+^2 : j+n\le 4N-1\}.$

Перейдемо тепер до розгляду наближення функції $f(z,w)$ вигляду (8) для випадку ваги (9). У цьому випадку ортогональний многочлен, що фігурує в формулюванні теореми 1, як вже зазначалося, буде збігатися з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі степеня $2N$. Коефіцієнти цього многочлена можна записати в явному вигляді (див. [7, с.581]).

Будемо мати

$$P_{2N}(t;\sigma,\nu)=C_N\sum_{m=0}^{2N}(-1)^m t^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\sigma+1+m)}.$$

Отже, отримаємо:

$$p_k^{(2N)} = (-1)^k \binom{2N}{k} \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+k)}{\Gamma(\sigma+1+k)}.$$

Це дозволяє на основі теореми 1 ефективно будувати раціональні апроксиманти описаного раніше вигляду для рядів Аппеля (10), а саме, встановлено наступний результат.

Теорема 3. Для гіпергеометричного ряду Аппеля (10) при будь-якому $N \in \mathrm{N}$ раціональна функція

$$\pi_{\mathrm{N},D}(z,w) = \frac{P_N(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)},$$

де $Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=N-j}^{N} (-1)^{j+n} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-n} \binom{2N}{2N-j-n} \frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)} z^j w^n +$

$$+\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-j-1} (-1)^{j+n} \frac{1}{2^{j+n}} \binom{j+n}{n} \binom{2N}{2N-j-n} \frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)} z^j w^n,$$

$P_N(z,w)$ має вигляд (12) з коефіцієнтами $c_{j,n}^{(N,N)}, j,n=\overline{0,N}$: вигляду (11) та узагальненими моментними зображеннями $s_{k,m}, k,m=\overline{0,N}$:

$$s_{k,m} = \frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}, \nu,\sigma > -1,$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (10) для всіх $(j,n) \in \mathrm{E} = \{(j,n) \in \mathrm{Z}_+^2 : j+n \le 4N-1\}$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Baker G.A. Essentials of Pade approximants. – *Academic Press,* N.Y.London, 1975. – 306 p.

[2] Рудин У. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1975.– 444 с.

[3] Бейкер Дж. мл. *Аппроксимации Паде.*– М.: Мир, 1986. – 502 с.

[4] Дзядик В.К. Про узагальнення проблеми моментів // *Доп. АН УРСР.* – 1981.–6.–С. 8-12.

[5] Бейтмен Г. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* – М.– Наука, 1973.– 296 с.

[6] Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.*– М.: Наука, 1979– 416 с.

[7] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.* Под ред. М.Абрамовица, И. Стиган.– М.: Наука, 1979.– 832 с.