УДК 519.53 + 517.987

СИНГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А.Романов

Введені поняття сингулярностей к-вимірних класів, що дозволило узагальнити відомий результат про розкладання міри в просторі R^n в суму абсолютно неперервної та сингулярної компонент на банахові простори.

It are introduced the notions of singularities of k-dimensional classes that make it possible for generalization the known result of decomposition a measure in the space R^n into the sum of an absolutely continuous and a singular components for the Banach spaces.

1. Введение. Известно, что для любой меры в конечномерном линейном пространстве существует ее разложение (в смысле Лебега) в сумму двух таких компонент, одна из которых абсолютно непрерывна, а другая сингулярна относительно инвариантной лебеговой меры. Также известно [1], что в бесконечномерных банаховых пространствах отсутствуют нетривиальные не только инвариантные, но даже и квазиинвариантные (по всем направлениям) меры. В связи с этим обстоятельством в [2] были введены понятия непрерывной и вполне разрывной мер в линейном пространстве X, зависящие от фиксированного подпространства H, а также была доказана возможность однозначного разложения произвольной меры в X в сумму H-непрерывной и вполне H-разрывной компонент, которое в случае $X=H=R^n$ совпадает с упомянутым разложением в смысле Лебега. Поскольку во многих вопросах теории меры в банаховых пространствах никакое линейное подпространство H заранее не фиксируется, то представляет интерес получение таких разложений мер, которые не зависят ни от какого линейного подпространства. Указанные разложения будут получены в теоремах 1 и 2 данной статьи с помощью вводимых в этой же статье понятий к-мерных сингулярностей.

2. Постановка задачи. Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Под *мерами* в X понимаем вполне конечные счетно-аддитивные функции множества, определенные на сигма-алгебре борелевских множеств из X и принимающие неотрицательные значения. Под *сдвигом* меры m на вектор h из X понимаем меру m_h, значение которой на каждом борелевском множестве B задается формулой $m_h(B)=m(B + h)$.

Определение 1. Направление вектора h называется *направлением непрерывности* меры, если при сдвиге меры на th и стремлении коэффициента t к нулю вариация разности между сдвинутой мерой и исходной мерой имеет нулевой предел.

Известно [3, c.484], что множество всех направлений непрерывности меры образует линейное подпространство (не обязательно замкнутое).

Пусть к – натуральное число.

Определение 2. Меру называем элементом *класса к-мерной непрерывности*, если ее можно представить как сумму конечного или счетного числа таких мер, для которых подпространства направлений непрерывности имеют размерности не меньше к.

Определение 3. Меру называем элементом *класса к-мерной сингулярности,* если она сингулярна относительно каждой меры из класса к-мерной непрерывности.

Замечание 1. Из определения 2 сразу следует, что класс мер к-мерной непрерывности замкнут относительно операции сложения. Если бы этот класс был определен иначе – как множество мер, для которых подпространства направлений непрерывности имеют размерности не меньше к (а не как суммы таких мер), – то этого свойства не было бы. Например, сумма двух гауссовских мер, сосредоточенных на взаимно ортогональных подпространствах гильбертова пространства, не имеет ни одного направления непрерывности, хотя каждая из них такие направления имеет.

Замечание 2. Из определений 2 и 3 следует, что для принадлежности меры классу к-мерной сингулярности необходимо и достаточно потребовать, чтобы она была сингулярной относительно каждой меры, для которой подпространство направлений непрерывности имеет размерность не меньше к.

Замечание 3. Ясно также, что при возрастании к классы мер к-мерной непрерывности образуют убывающую, а классы мер к-мерной сингулярности – возрастающую по включению последовательность множеств.

Цель статьи состоит в доказательстве теорем о разложимости мер на компоненты, входящие во введенные классы непрерывности и сингулярности.

3. Результаты работы.

Лемма 1. *Если мера абсолютно непрерывна относительно элемента из класса к-мерной непрерывности, то она сама принадлежит этому классу.*

Доказательство очевидно и основано на результатах [4, с. 81-82], согласно которым при переходе к абсолютно непрерывной мере все имеющиеся направления непрерывности сохраняются (при этом могут появиться и новые).

Лемма 2. *Если мера мажорируется элементом из класса к-мерной непрерывности, то она сама входит в этот класс.*

Лемма 2 является простым следствием леммы 1.

Лемма 3. *Если мера совпадает с суммой ряда, составленного из элементов, входящих в класс к-мерной непрерывности, то она тоже входит в этот класс.*

Доказательство очевидно и основано на определении 2 и на том простом факте, что двойной ряд имеет счетное число слагаемых.

Лемма 4. *Если мера m совпадает с пределом возрастающей (в широком смысле) последовательности элементов m_j из класса к-мерной непрерывности, то она тоже входит в этот класс.*

Доказательство. Разности $m_j - m_{j-1}$ соседних элементов нашей возрастающей последовательности мажорируются элементами m_j из класса к-мерной непрерывности, а потому (согласно лемме 2) сами входят в этот класс. Ряд, составленный из таких разностей и из меры m_1, имеет своей суммой меру m, а потому для завершения доказательства остается применить лемму 3.

Лемма 5. *Для принадлежности меры s классу к-мерной сингулярноти необходимо и достаточно потребовать, чтобы она не была мажорантой ни для какой нетривиальной меры d из класса к-мерной непрерывности.*

Доказательство необходимости. Если d мажорируется мерой s, то d абсолютно непрерывна относительно s. Если при этом d принадлежит классу к-мерной непрерывности, то (с учетом определения 3) d сингулярна относительно s. Таким образом, d одновременно абсолютно непрерывна и сингулярна относительно некоторой меры, а потому тривиальна.

Доказательство достаточности. Пусть c – произвольная мера из класса к-мерной непрерывности, d – абсолютно непрерывная компонента меры s относительно c. Тогда (по лемме 1) мера d входит в класс к-мерной непрерывности, а потому с учетом ее мажорируемости мерой s должно выполняться равенство d=0. Следовательно, мера s сингулярна относительно c, а потому (с учетом произвольности выбора c из класса к-мерной непрерывности) s принадлежит классу к-мерной сингулярности. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Пусть m – мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств сепарабельного банахова пространства X, к - натуральное число. Тогда меру m можно единственным способом разложить в сумму* *m=c + s, где c принадлежит классу к-мерной непрерывности, а s – классу к-мерной сингулярности.*

Доказательство существования. Пусть M – множество таких элементов из класса к-мерной непрерывности, которые мажорируются мерой m. Обозначим через A верхнюю грань значений мер из M на всем пространстве X. Эта верхняя грань не превосходит m(X), а потому конечна. Существует такая последовательность мер p_n из M, для которой p_n(X) имеет пределом число A. Обозначим через c_n верхнюю грань первых n мер указанной последовательности. Ясно, что последовательность мер c_n монотонно возрастает, причем c_n(X) имеет пределом число A.

Поскольку верхняя грань конечного числа элементов мажорируется суммой этих элементов, то из леммы 2 с учетом замечания 1 следует, что меры c_n принадлежат классу к-мерной непрерывности. Поскольку мера m является общей мажорантой для всех p_n, то она будет общей мажорантой и для всех c_n. Следовательно, меры c_n входят в множество M.

Поскольку для каждого борелевского множества B из X числовая последовательность c_n(B) монотонна и ограничена, то по теореме Вейершрасса она имеет конечный предел, который обозначим через c(B). Согласно теореме Никодима [5, с. 177], функция множества c как предел относительно сходимости на системе измеримых множеств последовательности счетно-аддитивных функций тоже имеет свойство счетной аддитивности, то есть является мерой.

Поскольку меры c_n возрастающей последовательности входят в класс к-мерной непрерывности, то по лемме 4 предельная мера c также входит в этот класс. Кроме того, предельная мера c мажорируется той же мерой m, что и все c_n. Следовательно, мера c принадлежит множеству M, причем ясно, что c(X)=A.

Итак, мера c уже построена. Зададим теперь меру s формулой s=m – c. Для доказательства ее к-мерной сингулярности воспользуемся леммой 5. Пусть d – элемент из класса к-мерной непрерывности, мажорируемый мерой s. Тогда мера d + c мажорируется мерой m и входит в класс к-мерной непрерывности. Следовательно, d + c входит в множество M, а потому d(X) + c(X) не превосходит A. Так как c(X) = A, то отсюда следует, что d(X) = 0, а потому мера d нулевая. Следовательно, по лемме 5 мера s имеет свойство к-мерной сингулярности. Доказательство существования завершено.

Доказательство единственности. Предположим, что m = c* + s* - еще одно разложение, для которого c* имеет свойство к-мерной непрерывности, а s* - к-мерной сингулярности. Тогда c* - c = s – s*.

Рассмотрим меру c_0, равную верхней грани вещественной меры c* - c и нулевой меры. Поскольку c_0 мажорируется элементом c* + c из класса к-мерной непрерывности, то по лемме 2 c_0 тоже входит в этот класс. Но c_0 мажорируется и мерой s из класса к-мерной сингулярности, а потому по лемме 5 $c_0 = 0$. Следовательно, мера c* не превосходит меру c. Аналогично можно доказать, что мера c не превосходит меру c*. Поэтому c=c* и s=s*. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть m - мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств сепарабельного банахова пространства X. Тогда существует такая последовательность мер s_k и такая мера c, для которых выполняются следующие свойства:*

1) $m = c + \sum_{k=1}^{\infty} s_k$.
2) *Для каждого натурального к мера s_k входит в класс к-мерной сингулярности.*
3) *Для каждого* $к > 1$ *мера $s_к$ входит в класс (к – 1) –мерной непрерывности.*
4) *Мера c входит в класс n - мерной непрерывности для всех n.*

Меры c и s_k определены однозначно.

Доказательство существования. Вначале к самой мере m применяем теорему 1 при к=1. В результате получаем разложение

$$m = s_1 + c_1 ,$$

где s_1 входит в класс 1-мерной сингулярности, а c_1 - в класс 1-мерной непрерывности. Мера s_1 уже построена.

Затем к мере c_1 применяем теорему 1 при к=2. В результате получаем разложение

$$c_1 = s_2 + c_2,$$

где s_2 входит в класс 2-мерной сингулярности (но вместе с тем, как и c_1, входит в класс 1-мерной непрерывности), а c_2 - в класс 2-мерной непрерывности. Теперь построены уже две меры s_1, s_2.

Затем к мере c_2 применяем теорему 1 при к=3. Продолжая этот процесс, приходим к равенствам

$$m = c_n + \sum_{k=1}^{n} s_k ,$$

в которых для мер s_k выполнены свойства 2) и 3), а последовательность мер c_n монотонно убывает к некоторой мере c (возможно, нулевой), причем для каждого n мера c_n входит в класс n-мерной непрерывности. Переходя в полученных равенствах к пределу, приходим к формуле, составляющей свойство 1). Полученная при этом мера c мажорируется каждой из мер c_n, а потому (по лемме 2) для нее выполняется свойство 4). Доказательство существования завершено.

Доказательство единственности. Вначале к мере m применяем вторую часть теоремы 1 (касающуюся единственности) при к=1. Это применение обеспечивает единственность меры s_1. Затем к мере $m - s_1$ применяем теорему 1 при к=2, что обеспечивает единственность меры s_2.После этого к мере $m - (s_1 + s_2)$ применяем теорему 1 при к=3. Продолжение этого процесса обеспечивает единственность всех мер s_k . Следовательно, мера c также определена однозначно. Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 4. Поскольку в пространстве R^n непрерывность меры по всем направлениям эквивалентна ее абсолютной непрерывности относительно инвариантной меры Лебега, то применение теоремы 2 к указанному пространству позволяет получить следующее

Следствие 1. Пусть m - мера в пространстве R^n. Тогда существует такой конечный набор мер s_k и такая мера c, для которых выполняются следующие свойства:

1) m= c + $\sum_{k=1}^{n} s_k$.
2) Для каждого натурального к, не превосходящего n , мера s_k входит в класс к-мерной сингулярности.
3) Для каждого к, для которого $2 \leq к \leq n$, мера s_k входит в класс (к – 1)-мерной непрерывности.
4) Мера c абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры Лебега.

Меры c и s_k определены однозначно.

Замечание 5. Следствие 1 детализирует известное разложение (в смысле Лебега) меры в пространстве X = R^n в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной относительно инвариантной лебеговой меры компонент. В качестве примера такой детализации зададим c как невырожденную гауссовскую меру в R^n, s_1 - как сингулярную меру, сосредоточенную на канторовском подмножестве отрезка единичной длины, помещенного в R^n, остальные s_k - как произведения индикаторов кубов с ребром ½ размерности к-1 (также помещенных в R^n) на инвариантные меры Лебега в линейных оболочках этих кубов (к$\leq n$) . Зададим теперь m как сумму c и всех этих s_k. Тогда компонентами разложения меры m в смысле

Лебега будут c и *сумма* всех s_k, а компонентами разложения меры m , определяемого следствием 1, – c и все *отдельные* s_k.

Замечание 6. Если в качестве X взять бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, в качестве c – невырожденную гауссовскую меру в таком пространстве [6, с. 170-175], а меры m и s_k задать аналогично тому, как это было сделано в замечании 5 (только теперь количество сингулярных мер s_k становится бесконечным), то обычного разложения меры m в смысле Лебега не существует (ввиду отсутствия в X инвариантной меры Лебега), а разложение, определяемое теоремой 2, будет иметь место, причем его компонентами служат опять-таки c и все *отдельные* s_k (последние – уже в бесконечном количестве).

ССЫЛКИ

[1] Судаков В.Н. (1959) . Линейные множества с квазиинвариантной мерой. *Доклады АН СССР.* 127, № 3, 524 – 525.

[2] Романов В.А. (1976). О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах. *Доклады АН СССР.* 227, № 3, 569 – 570.

[3] Романов В.А. (1982). Алгебраические размерности линейных многообразий непрерывных и дифференцируемых направлений мер в гильбертовом пространстве. *Математические заметки.* 32, № 4, 483 – 491.

[4] Романов В.А. (1977). Об Н-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* 32, № 1, 81 – 85.

[5] Данфорд Н.,Шварц Дж. (1962). *Линейные операторы. Общая теория.* –М.: ИЛ.–895 с.

[6] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. (1985). *Вероятностные распределения в банаховых пространствах.* – М.: Наука. – 368 с.