УДК 517.5

ПРО ЛІНІЙНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є ТА ТЕЙЛОРА

М.В. Гаєвський

The paper shows a method of summation, which will be a regular in the space of analytic functions and irregular in the space of continuous functions

В работе показан метод суммирования, который будет регулярным в пространстве аналитических функций и нерегулярным в пространстве непрерывных функций.

Нехай L – простір сумовних 2π–періодичних функцій з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$, а C – підпростір, який складається з неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f|$. Далі, $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n,k = 0,1,\ldots$ – нескінченнорядкова матриця дійсних чисел, що визначає деякий метод підсумовування. Кожній функції з рядом Фур'є –

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

поставимо у відповідність

$$U_n(f;\Lambda;x) = \lambda_0^{(n)}\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Будемо говорити, що ряд Фур'є функції $f \in C$ підсумовується методом Λ в точці x до значення $f(x)$, якщо в цій точці всі ряди в правій частині попереднього співвідношення збігаються і

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f,\Lambda,x) = f(x).$$

Метод підсумовування Λ є регулярним у просторі 2π–періодичних неперервних функциій C, якщо для довільної функції $f \in C$ і кожного x її ряд Фур'є підсумовується ним до числа $f(x)$.

Карамата и Томич [1] показали, що метод підсумовування Λ, визначений нескінченнорядковою матрицею буде регулярним в просторі C тоді і тільки тоді, коли виконані наступні умови:

(A) для всіх $k=0,1,2,\ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1$;

(B) для кожного n існує таке число M_n (що, можливо залежить від n), що для всіх m $\int_0^{\pi}|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k^{(n)}\cos kx\,|\,dx\le M_n$;

(C) повна варіація функцій $\bar{K}_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^x\{\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k^{(n)}\cos kx\}dx=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}}{k}\sin kx$

рівномірно обмежена, тобто $\int_0^{\pi}|\,d\bar{K}_n(x)|\le M$.

(Тут та далі під M будемо розуміти деякі абсолютні сталі, можливо неоднакові в різних формулах.)

Для трикутних матриць Λ, тобто матриць, у яких $\lambda_k^{(n)}=0$ для $n<k$ ці умови приймають більш простий вигляд [2], [3]. В цьому випадку для регулярності методу підсумовування Λ необхідо та достатньо виконання умови (A) та

$$\int_0^{2\pi}|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos kx\,|\,dx\le M.(B^*)$$

Далі нехай $D=\{w\in\mathrm{C}:|w|<1\}$, через $A(\bar{D})$ будемо позначати простір функцій $f(\cdot)$, аналітичних в D и неперервних в $\bar{D}=\{w\in\mathrm{C}:|w|\le 1\}$ з нормою

$$\|f\|_{A(\bar{D})}=\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|.$$

Якщо задано нескінченнорядкову матрицю $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\},n,k=0,1,\ldots$ дійсних чисел $\lambda_k^{(n)}$, то для кожної функції $f\in A(\bar{D})$ з рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\,z\in D \tag{1}$$

поставимо у відповідність послідовність рядів

$$U_n(f;\Lambda;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}c_k z^k,\ z\in\overline{D}. \tag{2}$$

Будемо говорити, что ряд (1) підсумовується методом Λ в точці $z\in\overline{D}$ до значення $f(z)$, якщо ряди (2) збігаються при довільному $n=0,1,\ldots$ і має місце співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}U_n(f,\Lambda,z)=f(z),z\in\overline{D}. \tag{3}$$

Метод підсумовування Λ називается регулярним в просторі $A(\overline{D})$, якщо для кожної $f\in A(\overline{D})$ та довільного $z\in\overline{D}$, ряд (1) підсумовується цим методом до числа $f(z)$.

Для трикутних матриць в просторі $A(\overline{D})$ Тайков [4] отримав наступний результат: *Для того щоб трикутна матриця дійсних чисел* Λ *була регулярною в просторі* $A(\overline{D})$, *необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла умові (A) та:*

(D) існує число $M>0$ *и такий розклад* $\lambda_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}+\beta_k^{(n)}$ *на дійсні числа* $\alpha_k^{(n)}$ *и* $\beta_k^{(n)}$ $(k=1,2,...,n)$, *що* $\int_0^{2\pi}|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx)|\,dx\le M\,(n=1,2,\ldots)$.

Він також показав, що умови регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ слабші умов регулярності в просторі C.

Критерій регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ опублікований в роботі в [5]: *Для регулярності* методу підсумовування Λ в просторі $A(\overline{D})$ необхідно і достатньо, *щоб виконувались умови (A) і*

(E) існувало число $M_n>0$, *що можливо залежить від* n, *і такий розклад* $\lambda_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}+\beta_k^{(n)},k=1,2,\ldots$ *на дійсні числа* $\alpha_k^{(n)}$ *і* $\beta_k^{(n)}$, *що кожна із функцій*

$$t_m^{(n)}(x)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx),n=0,1,\ldots;m=0,1,\ldots$$

задовольняє умові $\int_0^{2\pi}|t_m^{(n)}(x)|\,dx\le M_n,n=0,1,\ldots,$ *де величина* M_n *не залежить від* m;

(F) повна варіація функцій

$$K_n(x)=\lim_{m\to\infty}\int_0^x\Big(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k^{(n)}\cos kt+\beta_k^{(n)}\sin kt)\Big)dt=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\alpha_k^{(n)}\sin kx-\beta_k^{(n)}\cos kx)$$

була рівномірно обмеженою на $[0,2\pi]$*:*

$$\int_0^{2\pi}|dK_n(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx)\Big|\,dx\le M.$$

Тут ми покажемо, що умови регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ слабші умов регулярності в просторі C.

Відомо [6], что сума тригонометричного ряду $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\ln\nu}$ є функція $f\in L$ і

$$\int_0^{2\pi}|S_n(f,x)|\,dx=\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\cos\nu x}{\ln\nu}\Big|\,dx=O(1).$$

Також, функція $\varphi(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+\frac{\pi}{2})-f(x-\frac{\pi}{2})\big)\in L$ і $\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\sin(2\nu+1)x}{\ln(2\nu+1)}$,

крім того, має місце $\int_0^{2\pi}|S_n(\varphi,x)|\,dx=\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}\sin(2\nu+1)x}{\ln(2\nu+1)}\Big|\,dx=O(1).$

В той же час для ряду $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\cos(2\nu+1)x}{\ln(2\nu+1)}$ частинні суми необмежені в L.

Дійсно,

$$S_{[\frac{n+1}{2}]}(x)=\sum_{\nu=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{(-1)^{\nu+1}\cos(2\nu+1)x}{\ln(2\nu+1)}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x-\frac{\pi}{2})}{\ln\nu}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x+\frac{\pi}{2})}{\ln\nu},$$

$$\int_0^{2\pi}|S_{[\frac{n+1}{2}]}(x)|\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x-\frac{\pi}{2})}{\ln\nu}-\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x+\frac{\pi}{2})}{\ln\nu}\right|dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}-\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x-\pi)}{\ln\nu}\right|dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}-\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right|dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}\right|dx+O\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right|dx\Big).$$

Оскільки послідовність $\{\frac{1}{\ln\nu}\}$ – опукла і при $|x|\leq\frac{\pi}{2}$ для спряженого ядра Фейера $\tilde{F}_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(1-\frac{\nu}{n+1})\sin\nu x$ справедлива оцінка

$$|\tilde{F}_n(x+\pi)|=|\frac{(n+1)\sin(x+\pi)-\sin(n+1)(x+\pi)}{4(n+1)\sin\frac{x+\pi}{2}}|\leq\frac{n+2}{4(n+1)\sin^2\frac{\pi}{4}}<1,$$

то за допомогою перетворення Абеля нескладно отримати оцінку

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right|dx\leq M.\ \text{Тоді}\ \int_0^{2\pi}|S_{[\frac{n+1}{2}]}(x)|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}\right|dx+M.$$

Необмеженість частиних сум ряду $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}$ слідує із результатів роботи [7]: *Нехай коефіцієнти ряду $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\sin\nu x$ задовольняють умовам*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta a_\nu|+\sum_{\nu=2}^{\infty}|\sum_{k=1}^{[\nu/2]}\frac{\Delta a_{\nu-k}-\Delta a_{\nu+k}}{k}|<\infty,\text{ãäå}\,\Delta a_\nu=a_\nu-a_{\nu+1}.$$

Тоді частинні суми ряду обмежені в метриці L *тоді і лише тоді,коли для довільного* $n\in\mathrm{N}$ *виконуються умови*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{n+k}|}{k}\leq M \quad \text{та} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|a_\nu|}{\nu}<\infty.$$

Остання умова для даного ряду не виконується.

Визначимо матрицю $\Lambda=\{\lambda_\nu^{(n)}\}$ наступним чином

$$\lambda_\nu^{(n)}=\begin{cases}1-\frac{\nu}{n+1}, & \text{при}\,\nu\leq n,\\ 0, & \text{при}\ \ \nu>n\text{è}\nu=2k,\\ \frac{(-1)^{k+1}}{\ln\nu}, & \text{при}\ \ \nu>n\text{è}\nu=2k+1.\end{cases}$$

Помітимо, що поліном $\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(1-\frac{\nu}{n+1})\cos\nu x:=F_n(x)$ є ядром Фейера і для нього має місце співвідношення $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|F_n(x)|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_n(x)dx=1.$

Очевидно, що $\lambda_\nu^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$ та довільному фіксованому ν. Покажемо, що умова (В) теореми Карамати і Томіча не мають місця. Нехай $m > n$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \right| dx = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx + \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \right| dx \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \right| dx - \int_0^{2\pi} |F_n(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{2l+1=n+1}^{m} \lambda_{2l+1}^{(n)} \cos(2l+1)x \right| dx - M =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{l=[\frac{n}{2}]}^{[\frac{m-1}{2}]} \frac{(-1)^l}{\ln(2l+1)} \cos(2l+1)x \right| dx - M \geq \int_0^{2\pi} |S_{[\frac{m-1}{2}]}(x)|\, dx - \int_0^{2\pi} |S_{[\frac{n}{2}]}(x)|\, dx - M \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Тепер покладемо $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, де

$$\alpha_\nu^{(n)} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\nu}{n+1}, & \text{при } \nu \leq n, \\ 0, & \text{при } \nu > n \end{cases} \quad \text{та} \quad \beta_\nu^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{коли } \nu \leq n \text{ або } \nu > n \text{ та } \nu = 2k, \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{\ln \nu}, & \text{коли } \nu > n \text{ та } \nu = 2k+1. \end{cases}$$

Нехай $m > n$, тоді

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x) \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x \right| dx + \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=n}^{m} \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x \right| dx \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \cos \nu x \right| dx + \int_0^{2\pi} |S_m(\varphi, x)|\, dx + \int_0^{2\pi} |S_n(\varphi, x)|\, dx = O(1).$$

Отже, умова (Е) теореми виконується.

Оскільки, при довільному m значення

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x) \right| dx = O(1),$$

то умова (F) теореми також має місце.

ПОСИЛАННЯ

[1] Karamata J., Tomic′ M. Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues.// *Publications de l'Institut Mathe'matique*, vol. 8, 1955. – P. 123-138.

[2] Lozinski S. On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes. // *Матем. сб.*, 14(56):3, 1944. – С. 175-268

[3] Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье. // *Изв. АН СССР.* Сер. матем., 12:3, 1948. – С. 259-278

[4] Тайков Л. В. О методах суммирования рядов Тейлора. // *Изв. АН СССР*. Сер. матем., 26:4 , 1962. – С. 625-630.

[5] Гаевский Н. В., Гориславец Т. В., Задерей П. В О регулярности некоторых методов суммирования рядов Тейлора. // *Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування" присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942--2007)*: Тези доповідей. – С. 35.

[6] Ефимов А. В. Оценка интеграла от модуля многочлена на единичной окружности.// *УМН*, 15:4(94), 1960. – 215–218.

[7] Задерей П. В., Смаль Б. А. О сходимости в пространстве L_1 рядов Фурье.// *Український математичний журнал.* Т.54, №5, 2002. – С. 639-646.