УДК 519.1

ПРО ДЕНУМЕРАНТИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович

Мы получили несколько формул для денумерантов и постоянной Фробениуса..

We obtain several formulas for the denumerants and Frobenius-constant .

1. Вступ

Поняття денуміранта пов'язано з задачею (про розмін): є монети достоїнством в $a_1,\ldots, a_n$ копійок, скількома способами можна розміняти суму грошей в m копійок?

Цій задачі приділялося й досі приділяється багато уваги. Про історію й різноманітні проблеми, які з цим пов'язані, можна познайомитися в книзі [1], де приведено 492 посилання.

Задача про розмін еквівалентна такій: знайти кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах рівняння

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = m\,. \tag{1}$$

Кількість розв'язків позначається символом $d(m;a_1,\cdots,a_n)$ і називається *денумерантом* числа m (див. [2], стор. 140-146, 179-180.).

Числа $a_1,\ldots, a_n$ часто називають *генераторами m.* Число m називається міткою розв'язку $(x_1,\cdots,x_n)$. Далі вважатимемо, що числа $a_1,\ldots, a_n$ взаємно прості, тобто, н.с.д.($a_1,\ldots, a_n$) =1.

Рівняння (1) не завжди має розв'язок у невід'ємних цілих числах. Ті мітки m, для яких такий розв'язок існує, називаються *репрезентабельними.*

Нехай $a=(a_1,\cdots,a_n)$. Тоді множину всіх репрезентабельних міток позначатимемо символом $R(a)=R(a_1,\cdots,a_n)$, а множину всіх *нерепрезентабельних* міток позначатимемо символом $\overline{R}(a)$.

У зв'язку з цими поняттями виникають такі задачі.

- Описати множину $\overline{R}(a)$ і знайти кількість елементів цієї множини.
- Знайти найбільший елемент множини $\overline{R}(a)$(задача Фробеніуса).

  Такий елемент називається сталою Фробеніуса і позначається символом $g(a_1,\cdots,a_n)$.
- Знайти формули для $d(m;a_1,\cdots,a_n)$, якщо будуть задані конкретні значення генераторів.

Мета цієї статті: познайомити читачів з методами розв'язування цих задач.

2. Випадок двох генераторів

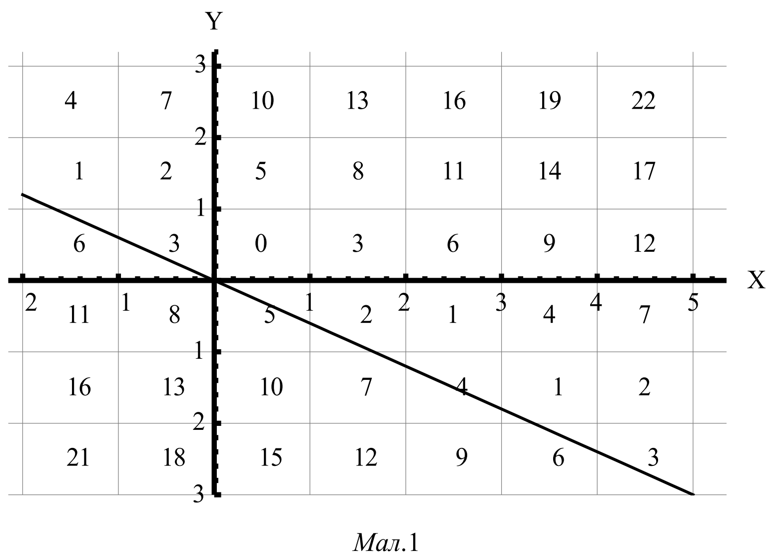
Теорема 1. *Нехай a та b взаємно прості додатні цілі числа. Тоді* $g(m;a,b) = ab - a - b$**.**

Існує декілька доведень цієї теореми. Повчальним є геометричне доведення, яке ми тут подаємо.

Розглянемо гратку з одиничними квадратними клітинками й помістимо її на координатну площину. Кожному вузлу (x,y) цієї гратки припишемо мітку $m = ax + by$. Вузлів з міткою m буде нескінченно багато. Ця гратка називається *граткою Фробеніуса.*

Проведемо ще пряму $ax+by=0$.

Наприклад, на мал.1 зображено фрагмент гратки Фробеніуса для (a,b) = (3,5) і пряма $3x+5y=0$.



*Мал.*1

В точках над прямою $ax+by=0$ мітки вузлів гратки невід'ємні , а під прямою від'ємні.

Множина всіх міток співпадає з множиною всіх цілих чисел. Більше того, для всякого $m \in Z$ існує нескінченно багато вузлів з такою міткою. Справді, якщо числа a та b взаємно прості, то відомо (див., наприклад, [3]), що рівняння $ax+by=m$ має нескінченно багато розв'язків, які знаходяться так: спочатку знаходиться який-небудь розв'язок рівняння $ax+by=1$, нехай це буде (u,v). Тоді всі інші розв'язки знаходяться за формулою $(x,y)=(u-tb, v+ta), t \in Z$.

Нас цікавлять тільки розв'язки з невід'ємними x та y.

Розіб'ємо гратку Фробеніуса на полоси $S_i := \{(x,y) \mid bi \le x < b(i+1)\}, i \in Z$. Покажемо, що кожна така полоса має рівно один вузол з міткою m. Для цього досить довести це твердження для полоси S_0, бо для кожної пари цілих чисел t_1 і t_2 перетворення $(-(t_2-t_1)b, (t_2-t_1)a)$ дає взаємно однозначну відповідність між полосами S_{t_1} і S_{t_2}, яке кожній точці з S_{t_1} ставить у відповідність точку з S_{t_2} з тією самою міткою.

Припустимо, що в полосі S_0 існує два вузла (x_1, y_1) і (x_2, y_2) з однією і тією ж міткою m, тобто $ax_1+by_1=ax_2+by_2=m$. Звідси $a(x_1-x_2)=b(y_2-y_1)$. Через те, що н.с.д.$(a, b)=1$, то число (x_1-x_2) повинно ділитися на b, тобто, $x_1-x_2=bt \ge b$, що неможливо, бо і $0 \le x_1 < b$ і $0 \le x_2 < b$.

Тепер стає зрозумілим, що *нерепрезентабельні* мітки знаходитимуться в полосі S_0 над прямою $ax+by=0$ і під віссю x-ів, тобто, в трикутнику T_0, який визначається нерівностями $T_0 = \{(x,y) \mid 0 \le x < b, y < 0, ax+by \ge 0\}$, а таких міток буде $(a-1)(b-1)/2$. Вузол з T_0, який найдалі знаходиться від прямої $ax+by=0$, має координати $(b-1, -1)$ (віддаль від точки (x, y) до цієї прямої пропорціональна числу $ax+by$), а тому його мітка $a(b-1)-b(-1)=ab-a-b$ буде найбільшою. Це і є стала Фробеніуса $g(a, b)$.

Наприклад, з мал.1 вбачаємо, що g(3, 5)=7.

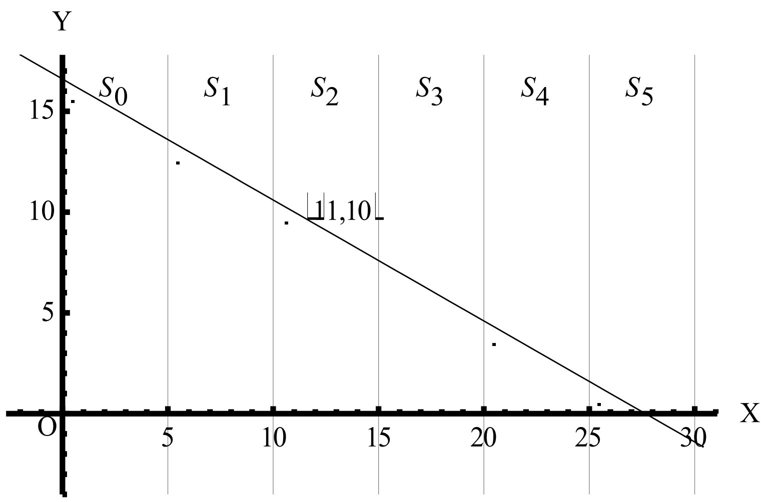
Теорема 2. *Якщо мітка m репрезентабельна, то кількість розв'язків рівняння $ax+by=m$ знаходиться за формулою*

$$d(m;a,b)=\left[\frac{x_i}{b}\right]+\left[\frac{y_i}{a}\right]+1,$$

де (x_i, y_i) *який-небудь розв'язок рівняння $ax+by=m$.*

([x] – ціла частина числа x).

Доведення. Нехай розв'язок (x_i, y_i) знаходиться в полосі S_i. Тоді кількість всіх розв'язків дорівнюватиме кількості точок перетину прямої $ax+by=m$ з межами полос в першому квадранті (див.мал.2 на прикладі рівняння $3x+5y=83$; i=2, а зірочками відмічені всі шість розв'язків цього рівняння). Це сума кількості точок перетину меж полос до i-ої, а це $\left[\frac{x_i}{b}\right]$ точок, кількості точок перетину границі i-ої полоси до правої межі полоси , в якій знаходиться точка перетину прямої $ax+by=m$ з віссю x-ів, а це $\left[\left(\frac{m}{a}-x_i\right)/b\right]=\left[\left(\frac{ax_i+by_i}{a}-x_i\right)/b\right]=\left[\frac{y_i}{b}\right]$ плюс один розв'язок (x_i,y_i).



Мал. 2

Наслідок 1. *Якщо розв'язок* (x_i, y_i) *знаходиться в полосі* S_0, *то* $\left[\frac{x_i}{b}\right]=0$ *і*

$$d(m;a,b)=\left[\frac{y_0}{a}\right]+1.$$

Наслідок 2. *Якщо число m ділиться на a, то*

$$d(m;a,b)=\left[\frac{m}{ab}\right]+1.$$

Справді, через те що a та b взаємно прості й $m=ax_i+by_i$ ділиться на a, то і y_i поділиться на a, а тому $\left[\frac{y_i}{b}\right]=\frac{y_i}{b}$, отже,

$$d(m;a,b)=\left[\frac{x_i}{b}\right]+\left[\frac{y_i}{a}\right]+1=\left[\frac{x_i}{b}+\frac{y_i}{a}\right]+1=\left[\frac{ax_i+by_i}{ab}\right]+1=\left[\frac{m}{ab}\right]+1.$$

Зокрема, $d(m;1,2)=\left[\frac{m}{2}\right]+1$; $d(m;2,3)=\left[\frac{m}{6}\right]+1$, якщо m парне, і, якщо m непарне, то $d(m;2,3)=\left\|\frac{m+1}{6}\right\|$ (тут і далі символ $\|x\|$ означатиме найближче ціле до x).

Примітка. Якщо число m не ділиться на a, то $d(m;a,b)$ може дорівнювати як числу $\left[\frac{m}{ab}\right]+1$ так і числу $\left[\frac{m}{ab}\right]$.

Наприклад, $d(34; 3, 8)=1$, а $d(35; 3, 8)=2$, хоча $\left[\frac{34}{3\cdot 8}\right]=\left[\frac{35}{3\cdot 8}\right]=1$.

Наслідок 3.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{d(m;a,b)}=ab.$$

3. Оцінки сталої Фробеніуса у випадку, коли *n* > 2

Теорема 4. *Якщо н.с.д.* $(a_1,\cdots,a_n)=1$, *то існує таке натуральне* $M=M(a_1,\cdots,a_n)$, *що для всякого натурального* $m>M$ *існує розв'язок рівняння* $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=m$ *у невід'ємних цілих числах.*

Доведення проведемо методом математичної індукції. З теореми 1 випливає, що для n=2 твердження має місце, бо за M можна взяти $g(a,b)$. Припустимо, що наше твердження істинне для всіх натуральних чисел, які менші або дорівнюють числу n-1 (n>2). Тоді, якщо н.с.д.$(a_1,\cdots,a_{n-1})=1$, то рівняння $a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}+0\cdot x_n=m$, за припущенням індукції, має розв'язок для всіх $m>M(a_1,...,a_{n-1})$.

Нехай тепер н.с.д.$(a_1,\cdots,a_{n-1})=d>1$. З умови теореми випливає, що н.с.д.$(d,a_n)=1$. Розглянемо рівняння $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=m$.

Через те, що н.с.д. $(a_1,\cdots,a_{n-1})=d$, то $a_i=a_i'd, i=1,\ldots,n-1$, а тому $a_1'x_1d+\cdots+a_{n-1}'x_{n-1}d+a_nx_n=m$. Оскільки н.с.д.$(d,a_n)=1$, то за x_n можна взяти єдине $0\le b_n<d$. Тоді $a_1'x_1d+\cdots+a_{n-1}'x_{n-1}d+a_nb_n=m.$ Звідси

$$a_1'x_1d+\cdots+a_{n-1}'x_{n-1}d=\frac{m-a_nb_n}{d}. \qquad (6)$$

В силу припущення індукції існує таке число $M'=M'(a_1',\ldots,a_{n-1}')$, що рівняння (6) матиме розв'язок для m таких, що $\frac{m-a_nb_n}{d}\ge\frac{m-a_n(d-1)}{d}>M'$.

Звідси

$$m>a_n(d-1)+M'(a_1',\ldots,a_{n-1}')d.$$

Число в правій частині цього співвідношення і буде шуканим.

Наслідок 5. Нехай $a_1'=a, a_2'=b, a_3=c$. За $M'(a_1',a_2')$ можна взяти число *ab–a–b*. Тоді $M=c(d-1)+(ab-a-b)d$, звідси

$$g(ad,bd,c)\le c(d-1)+(ab-a-b)d.$$

Наслідок 6. Якщо н.с.д.$(a,b)=1$, то

$$g(a,b,c)\le\min\{ab-a-b,ac-a-c,bc-b-c\}.$$

Наслідок 7. Нехай числа a_1,a_2,a_3 попарно взаємно прості. Тоді

$$g(a_1d,a_2d,a_3d,a_4)\le$$
$$a_4(d-1)+\min\{a_1a_2-a_1-a_2,a_1a_3-a_1-a_3,a_3a_2-a_3-a_2\}\cdot d.$$

Наприклад, $g(9,15,21,28)=77$, $g(12,15,21,28)=89$.

4. Денумеранти у випадку, коли *n* > 2

Коли n > 2 простих формул для $g(a_1,\cdots,a_n)$ і $d(m;a_1,\cdots,a_n)$, взагалі кажучи, не існує. В цьому випадку зручно використовувати метод генератрис і метод рекурентних співвідношень (рівнянь). Для подальшого розуміння досить мати уявлення про ці методи з книги [5, §§ 9, 10].

Генератрисою числової послідовності $d_0,d_1,\ldots,d_m,\ldots$ називається сума степеневого ряду $D(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k$. Наприклад, генератрисою послідовності $1,b,b^2,\ldots,b^m,\ldots$ буде функція $\dfrac{1}{1-bz}$.

Теорема 3. *Генератрисою послідовності денумерантів* $d_m=d(m;a_1,\ldots,a_n)$, $m=0,1,2,\ldots$, *є функція*

$$D(z)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m z^m=\frac{1}{Q(z)},\ \textit{де}\ \mathrm{Q(z)}=(1-\mathrm{z}^{\mathrm{a}_1})(1-z^{a_2})\cdots(1-z^{a_n}).$$

Доведення. $D(z)$ це добуток таких рядів:

$$\frac{1}{1-z^{a_1}}=1+z^{a_1}+z^{2a_1}+\cdots+z^{x_1a_1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-z^{a_2}}=1+z^{a_2}+z^{2a_2}+\cdots+z^{x_2a_2}+\cdots,$$

$$\cdots\cdot$$

$$\frac{1}{1-z^{a_n}}=1+z^{a_n}+z^{2a_n}+\cdots+z^{x_na_n}+\cdots.$$

Після того, як ці ряди перемножити, показники m в z^{m} матимуть вигляд $a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, а число всіх таких представлень мітки m дасть коефіцієнт d_{m}.

Наслідок 7.

$$g(a_1,\cdots,a_n)=\max\{m\,|\,D^{(m)}(0)=0,\ m\le M(a_1,\cdots,a_n)\}.$$

З теорії степеневих рядів випливає, що $d_m=\dfrac{D^{(m)}(0)}{m!}$, а, отже,

$g(a_1,\cdots,a_n)=\max\{m\,|\,D^{(m)}(0)=0\}$.

Для знаходження похідних $D^{(m)}(0)$ можна скористатись якимось математичним пакетом, наприклад, Mathematica, Derive, Maple і їм подібними. Та такий метод не дає можливості отримати загальні формули для $d(m;a_1,\cdots,a_n)$. Багато математиків займалися їхнім пошуком, різними методами було отримано ряд таких формул. Розглянемо три методи.

I. Перепишемо генератрису денумерантів так:

$$D(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k=\frac{1}{1-z^{a_1}}\cdots\frac{1}{1-z^{a_n}}=\frac{(1-z^A)^n}{(1-z^{a_1})\cdots(1-z^{a_{n1}})}\cdot\frac{1}{(1-z^A)^n}=$$

$$(1+z^{a_1}+\cdots+z^{A/a_1-1})\cdots(1+z^{a_n}+\cdots+z^{A/a_n-1})\cdot(1-z^A)^{-n}=P(z)\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+n-1}^{n-1}z^{Am}.$$

Коефіцієнти многочлена $P(z)$ не залежать від m. Прирівнюючи коефіцієнти справа й зліва при однакових степенях z у відповідних рядах, отримаємо формули для денумерантів.

На практиці цей метод зручно застосовувати у випадку, коли найменше спільне кратне чисел $(a_1,\ldots,a_n)$ невелике.

Приклад. Знайти $d(m;1,1,1,2)$. В цьому випадку

$P(z)=(1+z)^3=1+3z+3z^2+z^3$

і тому $\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k=(1+3z+3z^2+z^3)\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+3}^3 z^{2m}$. Звідси

$$d_{2m}=C_{m+3}^3+3C_{m+2}^3=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+3),$$

$$d_{2m+1}=3C_{m+3}^3+C_{m+2}^3=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(4m+9).$$

Або

$$d(m;1,1,1,2)=\left[\frac{1}{24}(m+2)(m+4)(2m+3)\right],m\in\mathrm{N}.$$

Денумерант d_{m} можна було б отримати безпосередньо, без застосування рядів, знайшовши кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = m$. А їх буде (пропонуємо впевнитись самостійно): $d_m = C_{m+2}^2 + C_m^2 + C_{m-2}^2 + \cdots$. Звідси отримаємо співвідношення:

$$C_m^2 + C_{m-2}^2 + C_{m-4}^2 \cdots = \left[\frac{1}{24} m(m+2)(2m-1)\right].$$

II. Цей метод ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 4. *Для всякого* $s \in N$ і $k = 0, 1, \ldots, s-1$ *має місце співвідношення* $d(m; 1, 1, a_1, \ldots, a_n) = d(sm + k; 1, s, sa_1, \ldots, sa_n)$.

Доведення. Генератрисою денуміранта $d(sm + k; 1, s, sa_1, \ldots, sa_n)$ є функція

$$D(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^s} \cdot \frac{1}{1-z^{sa_1}} \cdots \frac{1}{1-z^{sa_n}} = \frac{1 + z + \cdots + z^{s-1}}{1-z^s} \cdot \frac{1}{1-z^s} \cdot \frac{1}{1-z^{sa_1}} \cdots \frac{1}{1-z^{sa_n}}$$
$$= (1 + z + \cdots + z^{s-1}) \hat{D}(z^S),$$

де $\hat{D}(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^{a_1}} \cdots \frac{1}{1-z^{a_m}}$ генератриса денумеранта $d(m; 1, 1, a_1, \ldots, a_n)$.

Денумерант $d(sm + k; 1, s, sa_1, \ldots, sa_n)$ це коефіцієнт розкладу $D(z)$ в степеневий ряд при члені з $z^{\mathrm{sm+k}}$, а $d(m; 1, 1, a_1, \ldots, a_n)$ це коефіцієнт розкладу $\hat{D}(z^S)$ в степеневий ряд при члені з z^{m}. Якщо тепер прирівняти коефіцієнти при однакових степенях z зліва і справа в розкладах $D(z)$ і $(1 + z + \cdots + z^{s-1}) \hat{D}(z^S)$, то отримаємо твердження теореми 4.

Приклад.

$$d(3m; 1,3,3,6) = d(3m+1; 1,3,3,6) = d(3m+2; 1,3,3,6) =$$
$$d(m; 1,1,1,2) = \left[\frac{1}{24}(m+2)(m+4)(2m+3)\right], m \in \mathrm{N}.$$

III. Потужним методом отримання формул для денумерантів є метод рекурентних співвідношень, який зараз розглянемо.

Нехай $Q(z)=1+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_rz^r$, де $r=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Тоді матимемо тотожність $D(z)\cdot Q(z)\equiv 1$, або

$$(1+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_rz^r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}d_mz^m\equiv 1\ . \qquad (3)$$

Будемо дивитись на 1 як на ряд $1+0\cdot z+0\cdot z^2+\cdots+0\cdot z^k+\cdots$. Прирівнюючи коефіцієнти справа й зліва при однакових степенях z в співвідношенні (3) отри-маємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $d_0,d_1,\ldots,d_m,\ldots$.

$$\begin{cases} d_0=1 \\ d_1+b_1=0 \\ d_2+d_1b_1+b_2=0 \\ \ldots\ldots \\ d_r+d_{r-1}b_1+\cdots+d_2b_{r-1}+b_r=0 \end{cases} \qquad (4)$$

....

$$d_{m+r}+b_1d_{m+r-1}+\cdots+b_rd_m=0,\ m=0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Отже, бачимо, що денуміранти $d_0,d_1,\ldots,d_m,\ldots$ можна отримати з рекурентного співвідношення (5), розв’язавши попередньо систему (4). Рівняння (5) це лінійне рекурентне співвідношення з постійними коефіцієнтами. Добре відомі методи розв’язування таких рівнянь (див., наприклад, [6], стор. 89-98). Для цього потрібно знайти корені відповідного характеристичного рівняння. В нашому випадку це корені рівняння $\mathrm{Q}(\lambda)=(1-\lambda^{a_1})(1-\lambda^{a_2})\cdots(1-\lambda^{a_n})=0$, які всі легко виписати. За відомими правилами, виписується загальний розв’язок рівняння (5), а потім, скориставшись розв’язками системи (4), які дають початкові значення послідовності денумерантів, знаходять шуканий вираз для денуміранта.

Проіллюструємо метод рекурентних співвідношень на конкретних прикладах.

Приклад 1. Знайти $d(m;2,3,4)$.

В цьому випадку

$$\begin{aligned}\mathrm{Q(z)} &= (1-\mathrm{z}^2)(1-z^3)(1-z^4) = (1-z)^3(1+z)^2(1+z^2)(1+z+z^2) \\ &= 1 - z^2 - z^3 - z^4 + z^5 + z^6 + z^7 - z^9.\end{aligned}$$

Рекурентне співвідношення для знаходження денумерантів:

$$d_{m+9} - d_{m+7} - d_{m+6} - d_{m+5} + d_{m+4} + d_{m+3} + d_{m+2} - d_m = 0,\ m = 0,1,2,\ldots \quad (6)$$

Корені характеристичного рівняння це нулі многочлена $Q(z)$, вони такі:

$$\lambda_{1,2,3} = 1, \lambda_{4,5} = -1, \lambda_{6,7} = \pm i, \lambda_{8,9} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Тепер можна виписати загальний розв'язок рекурентного рівняння (6) :

$$d_m = C_1 + C_2 m + C_3 m^2 + (C_4 + C_5 m)(-1)^m + C_6\cos\frac{m\pi}{2} + C_7\sin\frac{m\pi}{2} + C_8\cos\frac{m\pi}{2} + C_9\sin\frac{m\pi}{2}, \quad (7)$$

де $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$ довільні сталі.

Для знаходження частинного розв'язку рівняння (6) знайдемо початкові значення послідовності денумерантів, це розв'язки відповідної системи рівнянь (4). Послідовно знаходимо

$$d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 1, d_6 = 3, d_7 = 2, d_8 = 4.$$

Прирівнюючи праві частини співвідношення (7) до отриманих початкових значень, отримаємо систему 9 лінійних рівнянь з 9 невідомими. Розв'язавши отриману систему, остаточно отримаємо формулу для денумерантів:

$$d(m;2,3,4) = \frac{107}{288} + (-1)^m\left(\frac{9}{32} + \frac{m}{16}\right) + \frac{3m}{16} + \frac{m^2}{48} + \frac{1}{8}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{2}{9}\cos\frac{2m\pi}{3} - \frac{1}{8}\sin\frac{2m\pi}{3}.$$

Цю формулу можна спростити, якщо звернути увагу на те, що

$$\left|\frac{1}{8}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{2}{9}\cos\frac{2m\pi}{3} - \frac{1}{8}\sin\frac{2m\pi}{3}\right| \le \frac{17}{36}.$$

Тоді матимемо:

$$d(m;2,3,4)=\begin{cases}\left\|\dfrac{(m+3)^2}{48}\right\|, \text{ÿêùî } m \text{ íåïàðíå}\\ \left\|\dfrac{(m+6)^2}{48}\right\|, \text{ÿêùî } m \text{ ïàðíå}\end{cases}.$$

Приклад 2. Знайти $d(m;1,1,2,5,10)$.

В цьому випадку

$$\begin{aligned}&\mathrm{Q(z)}=(1-z)^2(1-\mathrm{z}^2)(1-z^5)(1-z^{10})=\\&(1-z)^5(1+z)^2(1+z+z^2+z^3+z^4)^2(1-z+z^2-z^3+z^4)=\\&1-2z+2z^3-z^4-z^5+2z^6-2z^8+z^9-z^{10}+2z^{11}-2z^{13}+\\&z^{14}+z^{15}-z^{16}+2z^{18}-z^{19}.\end{aligned}$$

Рекурентне співвідношення для знаходження денумерантів:

$$\begin{aligned}&d_{m+19}-2d_{m+18}+d_{m+16}-d_{m+15}-d_{m+14}+2d_{m+13}-2d_{m+11}+d_{m+10}-d_{m+9}\\&+2d_{m+8}-2d_{m+6}+d_{m+5}+d_{m+4}-2d_{m+3}+2d_{m+1}-d_m=0,\ m=0,1,2,\ldots\end{aligned}\tag{8}$$

Корені характеристичного рівняння це нулі многочлена $Q(z)$, вони такі:

$$\lambda_{1,2,3,4,5}=1,\lambda_{6,7}=-1,\lambda_{8,9,10,11}=\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5},\lambda_{12,13,14,15}=\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5},$$
$$\lambda_{16,17,18,19}=\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}.$$

Тепер можна виписати загальний розв'язок рекурентного рівняння (8):

$$\begin{aligned}&d_m=C_1+C_2m+C_3m^2+C_4m^3+C_5m^4+(C_6+C_7m)(-1)^m+\\&(C_8+C_9m)\cos\frac{2m\pi}{5}+(C_{10}+C_{11}m)\sin\frac{2m\pi}{5}+(C_{12}+C_{13}m)\cos\frac{4m\pi}{5}+\\&(C_{14}+C_{15}m)\sin\frac{4m\pi}{5}+C_{16}\cos\frac{m\pi}{5}+C_{17}\sin\frac{m\pi}{5}+C_{18}\cos\frac{3m\pi}{5}+C_{19}\sin\frac{3m\pi}{5},\end{aligned}$$

де $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8,C_9,C_{10},C_{11},C_{12},C_{13},C_{14},C_{15},C_{16},C_{17},C_{18},C_{19}$ довільні сталі.

Для знаходження частинного розвязку рівняння (8) знайдемо початкові значення послідовності денумерантів, це розв'язки відповідної системи рівнянь (4). Послідовно знаходимо

$d_0 = 1, d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = 6, d_4 = 9, d_5 = 13, d_6 = 18, d_7 = 24, d_8 = 31, d_9 = 39,$
$d_{10} = 50, d_{11} = 62, d_{12} = 77, d_{13} = 93, d_{14} = 112, d_{15} = 134, d_{16} = 159, d_{17} = 187,$
$d_{18} = 218.$

Прирівнюючи праві частини співвідношення (7) до отриманих початкових значень, отримаємо систему 19 лінійних рівнянь з 19 невідомими. Розв'язавши цю систему (наприклад, з допомогою "Mathematica"), остаточно отримаємо формулу для знаходження денумерантів:

$$\begin{aligned}
&d(m;1,1,2,5,10) = \\
&\frac{1}{24000}(26799 + (-1)^m 1425 + 21850m + (-1)^m 150m + 4760m^2 + 380m^3 + 10m^4 - \\
&1200(2+\sqrt{5})\cos\frac{m\pi}{5} - 48(-6 + 17\sqrt{5} + 2\sqrt{5}m)\cos\frac{2m\pi}{5} + \\
&1200(-2+\sqrt{5}\cos\frac{3m\pi}{5} + 48(6 + 17\sqrt{5} + 2\sqrt{5}m)\cos\frac{4m\pi}{5} - 240\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\times \\
&\sin\frac{m\pi}{5} + 48(\sqrt{2255 + 958\sqrt{5})} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}m)\sin\frac{2m\pi}{5} + 240\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\times \\
&\sin\frac{3m\pi}{5} - 48(\sqrt{2255 - 958\sqrt{5})} + 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}m)\sin\frac{4m\pi}{5}).
\end{aligned}$$

Якщо врахувати, що сума членів цього виразу з тригонометричними функціями не перевищує по модулю величину 0.62+0.034m, його можна спростити. Нехай

$$\begin{aligned}
&D(m) := \\
&\frac{1}{24000}(26799 + (-1)^m 1425 + 21850m + (-1)^m 150m + 4760m^2 + 380m^3 + 10m^4).
\end{aligned}$$

Тоді

$$d(m;1,1,2,5,10) = \begin{cases} [D(m)], \text{ÿêùî} \quad m-2 \text{ ³ } m-4 \text{ íå} \quad \text{ä³ëÿòüñÿ íà} \;\; 5, \\ \left[D(m) + \dfrac{m}{50}\right] + 1, \text{ ÿêùî} \quad m-2 \text{ ä³ëèòüñÿ íà} \;\; 5, \\ \left[D(m) - \dfrac{m}{50}\right], \text{ÿêùî} \quad m-4 \text{ ä³ëèòüñÿ íà} \;\; 5. \end{cases} \qquad (9)$$

Зокрема, застосувавши теорему 4, ми отримаємо розв'язок задачі 2 (після глави 6 монографії [2], стор.180), а також загальну формулу для розв'язування задачі про розмін, яка досліджувалась в книзі [7, стор. 379-380]. Так число способів розміняти 1000000 доларів на пенні, нікелі, дайми, чверті й напівдолари можна знайти за формулою (9): $d(100000000;1,5,10,25,50) = d(20000000;1,1,2,5,10) = [D(20000000)] =$ 66666793333412666685000001 і це співпадає з результатом книги [7].

5. Формули

Використовуючи розглянуті вище методи, отримано такі формули.

1.

$$d(m;2,3) = \frac{5}{12} + \frac{(-1)^m}{4} + \frac{m}{6} + \frac{1}{3}\cos\frac{2m\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\frac{2m\pi}{3} =$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{m}{6}\right] + 1, \text{ ÿêùî } m \text{ ïàðíå,} \\ \left\|\dfrac{(m+1)}{6}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ íåïàðíå.} \end{cases}$$

2. $$d(m;1,1,2) = \frac{7}{8} + m + \frac{m^2}{4} + \frac{(-1)^m}{8} = \left[\frac{(m+2)^2}{4}\right].$$

3. $$d(m;1,2,3) = \frac{47}{72} + \frac{(-1)^m}{8} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{12} + \frac{2}{9}\cos\frac{2m\pi}{3} = \left\|\frac{(m+3)^2}{12}\right\|.$$

4. $$d(m;1,2,4) = \frac{21}{32} + (-1)^m\left(\frac{7}{32} + \frac{m}{16}\right) + \frac{7m}{16} + \frac{m^2}{16} + \frac{1}{8}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin\frac{m\pi}{2} =$$

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{(m+4)^2}{16}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ ïàðíå,} \\ \left\|\dfrac{(m+3)^2}{16}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ íåïàðíå.} \end{cases}$$

5.

$$d(m;1,2,5)=\frac{27}{40}+\frac{(-1)^m}{8}+\frac{2m}{5}+\frac{m^2}{20}+\frac{5-\sqrt{5}}{50}\cos\frac{2m\pi}{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{50}\cos\frac{4m\pi}{5}+$$
$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{2m\pi}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{4m\pi}{5}=\left\|\frac{(m+4)^2}{20}\right\|.$$

6.

$$d(m;1,2,6)=\frac{101}{144}+(-1)^m\left(\frac{3}{16}+\frac{m}{24}\right)+\frac{3m}{8}+\frac{m^2}{24}+\frac{1}{9}\cos\frac{2m\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}\sin\frac{m\pi}{2}=$$
$$\begin{cases}\left\|\dfrac{(m+5)^2}{24}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ ïàðíå},\\ \left\|\dfrac{(m+4)^2}{16}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ íåïàðíå}.\end{cases}$$

7.

$$d(m;1,3,4)=$$
$$\frac{83}{144}+\frac{(-1)^m}{16}+\frac{m}{3}+\frac{m^2}{24}+\frac{1}{4}\cos\frac{m\pi}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{2m\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}\sin\frac{2m\pi}{3}=\left\|\frac{(m+4)^2}{24}\right\|.$$

8.

$$d(m;1,3,5)=$$
$$\frac{26}{45}+\frac{3m}{10}+\frac{m^2}{30}+\frac{5+\sqrt{5}}{50}\cos\frac{2m\pi}{5}+\frac{5-\sqrt{5}}{50}\cos\frac{4m\pi}{5}+\frac{2}{9}\cos\frac{2m\pi}{3}+$$
$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{2m\pi}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{4m\pi}{5}=\left\|\frac{(m+3)(m+6)}{30}\right\|.$$

9.

$$d(m;1,3,6)=\frac{127}{216}+\frac{(-1)^m}{24}+\frac{5m}{18}+\frac{m^2}{36}+\frac{1}{12}\cos\frac{m\pi}{3}+\left(\frac{31}{108}+\frac{m}{18}\right)\cos\frac{2m\pi}{3}+$$
$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\sin\frac{m\pi}{3}+\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{m}{18\sqrt{3}}\right)\sin\frac{2m\pi}{3}=$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{(m+6)^2}{36}\right], \text{ ÿêùî } m \text{ ä³ëÿòüñÿ íà } 3; \left[\dfrac{(m+5)^2}{36}\right], \text{ ÿêùî } m-1 \text{ ä³ëèòüñÿ íà } 3; \\ \left[\dfrac{(m+4)^2}{36}\right], \text{ ÿêùî } m-2 \text{ ä³ëèòüñÿ íà } 3. \end{cases}$$

10.

$$d(m;1,2,3,4) = \frac{175}{288} + (-1)^m \left(\frac{m+5}{32}\right) + \frac{15m}{32} + \frac{5m^2}{48} + \frac{m^3}{144} + \frac{1}{8}\cos\frac{m\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{9}\cos\frac{2m\pi}{3} + \frac{1}{9\sqrt{3}}\sin\frac{2m\pi}{3} = \begin{cases} \left\|\dfrac{(m+5)^3}{144} - \dfrac{m}{48}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ ïàðíå}, \\ \left\|\dfrac{(m+5)^3}{144} \dfrac{m}{12}\right\|, \text{ ÿêùî } m \text{ íåïàðíå}. \end{cases}$$

11.

$$d(m;1,1,2,3) = \frac{119}{144} + \frac{(-1)^m}{16} + \frac{11m}{12} + \frac{7m^2}{24} + \frac{m^3}{36} + \frac{1}{9}\cos\frac{2m\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27}\sin\frac{2m\pi}{3} =$$

$$\left\|\frac{(m+5)(2m^2+11m+11)}{72}\right\|.$$

12.

$$d(m;1,1,2,5) = \frac{15}{16} + \frac{(-1)^m}{16} + \frac{53m}{60} + \frac{9m^2}{40} + \frac{m^3}{60} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\cos\frac{2m\pi}{5} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\cos\frac{4m\pi}{5} +$$

$$\frac{1}{25}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\sin\frac{2m\pi}{5} - \frac{1}{25}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\sin\frac{4m\pi}{5} = \left\|\frac{(m+2)(m+4)(2m+15)}{120}\right\|.$$

13.

$$d(m;1,1,2,3,5) = \frac{18461}{21600} + \frac{13m}{15} + \frac{49m^2}{180} + \frac{m^3}{30} + \frac{m^4}{720} + \frac{1-\sqrt{5}}{50}\cos\frac{2m\pi}{5} + \frac{2}{27}\cos\frac{2m\pi}{3} +$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{50}\cos\frac{4m\pi}{5} + \frac{1}{25}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\sin\frac{2m\pi}{5} + \frac{1}{25}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\sin\frac{4m\pi}{5} = \left\|\frac{(m^2+12m+26)^2}{720}\right\|.$$

14.

$$d(m;1,1,2,3,5,8)=\frac{3193}{3456}+(-1)^m\left(\frac{5}{128}+\frac{m}{256}\right)+\frac{3377m}{3840}+\frac{37m^2}{144}+\frac{137m^3}{4320}+$$

$$\frac{m^4}{536}+\frac{m^5}{28800}-\frac{1}{8\sqrt{2}}\cos\frac{m\pi}{4}+\frac{1}{27}\cos\frac{2m\pi}{3}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\cos\frac{3m\pi}{4}+\frac{1}{25}\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}\sin\frac{2m\pi}{5}+$$

$$\frac{1}{32}\sin\frac{m\pi}{2}-\frac{1}{27\sqrt{3}}\sin\frac{2m\pi}{3}+\frac{1}{25}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}\sin\frac{4m\pi}{5}.$$

Якщо врахувати, що сума членів цього виразу з тригонометричними функціями не перевищує по модулю величину 0.377, його можна спростити. Нехай

$$F(m):=\frac{1}{86400}(m+2)((m+10)(m+18)(3m^2+60m+232).$$

Тоді

$$d(m;1,1,2,3,5,8)=\begin{cases}\left\|F(m)-\dfrac{m}{2700}\right\|, \text{ÿêùî } m \text{ ïàðíå},\\[2ex] \left\|F(m)-\dfrac{707m}{86400}\right\|, \text{ÿêùî } m \text{ íåïàðíå}.\end{cases}$$

15.

$$d(m;\ \underbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}_{k\ \text{îäèíè÷îê}},\ 2)=$$

$$\left[\tilde{N}_{m/2+k}^{k}+C_k^2C_{m/2+k-1}^{k}+C_k^4C_{m/2+k-2}^{k}+\cdots\right]=C_{k+m-1}^{k-1}+C_{k+m-3}^{k-1}+C_{k+m-5}^{k-1}+\cdots$$

ПОСИЛАННЯ

[1] J.L.R. Alfonsin, *The diophantine Frobenius problem*, Oxford University Press, 2005.

[2] Дж. Риордан, *Введение в комбинаторный анализ*, «ИЛ», Москва, 1963.

[3] А.О. Гельфонд, *Решение уравнений в целых числах*, «Наука», Москва, 1978.

[4] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974.

[5] І.І. Єжов, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко, *Елементи комбінаторики,* «Вища школа», Київ, 1972.

[6] Ю.І. Волков, Н.М. Войналович, *Елементи дискретної математики,* РВЦ КДПУ, Кіровоград, 2000.

[7] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика*, «Мир», Москва, 1998.