УДК 512.662.5

ІЗОТОПНІ ФУНКЦІЇ В ПРИКЛАДАХ

О.П. Бондар

Дано определение дифференцируемых (кусочно-дифференцируемых, непрерывных) изотопных функций и приведены примеры гомотопий, связывающих эти функции.

We give a definition of the differentiable (piecewise differentiable, continuous) isotopic functions and consider a few examples of the homotopy connecting these functions.

Функція Морса f_0 є ізотопною функції Морса f_1 ([1]) якщо в просторі $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ всіх нескінченно диференційовних функцій на многовиді M^n зі значеннями в $\mathbb{R}$ існує шлях $\gamma : [0, 1] \to C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, такий, що $\gamma(0) = f_0$, $\gamma(1) = f_1$, і $\gamma(t)$ – функція Морса для всіх $t \in [0,1]$.

Іншими словами, функції Морса f_0 і f_1 ізотопні, якщо в просторі всіх функцій Морса існує гомотопія

$$F : M^n \times I \to \mathbb{R} \ (I = [0,1]),$$

що зв'язує f_0 і f_1, тобто існує така сім'я функцій Морса

$$f_t : M^n \to \mathbb{R}, \quad f_t(x) = F(x, t),$$

яка неперервно залежить від параметра $t \in [0,1]$ і

$$F(x,0) = f_0(x), F(x,1)= f_1(x)$$

для будь-якого $x \in M^n$.

Ізотопні функції Морса є підмножиною множини ізотопних функцій, які визначимо наступним чином: функції F_0 і F_1 ізотопні, якщо їх з'єднує відповідна гомотопія, побудована за допомогою ізотопних відображень образів і прообразів цих функцій.

О з н а ч е н н я. Диференційовні (кусково-диференційовні, неперервні) на многовиді $M\,n$ функції

$$F0 : M\,n \to \mathbb{R} \text{ і } F1 : M\,n \to \mathbb{R}$$

назвемо диференційовно (кусково-диференційовно, неперервно) *ізотопними*, якщо існує диференційовне (кусково-диференційовне, неперервне) відображення

$$F : M\,n \times I \to \mathbb{R} \times I,$$

що зберігає рівні («уровни»), і визначене формулою

$$F\,(x, t) = (\,Ft\,(x), t\,),$$

де $Ft\,(x)$ - гладка (кусково-гладка, неперервна) гомотопія, що зв'язує $F0$ і F1 ,

тобто

$$F\,(x, 0) = (F0\,(x), 0) \text{ та } F\,(x, 1) = (F1\,(x), 1),$$

і така, що

$$Ft = ht \circ F0 \circ Ht - 1,$$

де ht і Ht гладкі (кусково-гладкі, неперервні) ізотопії

$$H : M\,n \times I \to M\,n \times I,\ \ H\,(x, t) = (Ht\,(x), t) \text{ і}$$

$$h :\ \mathrm{R} \times I \to \mathrm{R} \times I, \quad h\,(x, t) = (ht\,(x), t).$$

З а у в а ж е н н я 1. Ізотопні функції є ізотопними відображеннями в класичному сенсі (див., напр., [2]), якщо $M\ n = \mathrm{R}$ і ці функції – гомеоморфізми.

З а у в а ж е н н я 2. Диференційовно (кусково-диференційовно, неперервно) *ізотопні* функції є диференційовно (топологічно) еквівалентними. На мові локальних координат Ft – множина функцій, ізотопія H – це заміна незалежних змінних, ізотопія h – заміна залежних змінних. З цієї точки зору питання про диференційовну (кусководиференційовну, неперервну) *ізотопність* функцій є питанням про те, чи існують відповідні ізотопні заміни незалежних і залежних змінних, такі, щоб ці функції були диференційовно (топологічно) еквівалентними.

З а у в а ж е н н я 3. Ізотопність функцій може визначатися за допомогою не єдиної гомотопії, яка зв'язує ці функції. В залежності від мети, що ставиться до дій з ізотопними функціями, обирається та чи інша гомотопія. Приклади функцій і різних гомотопій, що їх зв'язує, наведено нижче.

П р и к л а д 1. Функції

$F0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F0\,(x) = x2 \quad$ і $\; F1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F1\,(x) = x2 + \varepsilon\, x$

є диференційовно ізотопними. Але гомотопія

$$Ft : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}\,,\; Ft = (1 - t\,)\,F0 + t\,F1,$$

що є найпростішою, на наш погляд, гладкою гомотопією

$$Ft\,(x) = \{s : s \in \mathbb{R},\, s = x2 + t\,\varepsilon\, x\,\},$$

яка зв'язує $F0\ (x)$ і $F1\ (x)$, не є вказаною в означенні, оскільки не виражена через ізотопії h і H.

П р и к л а д 2. Одну з гладких гомотопій, що зв'язує ці функції

$F0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F0\,(x) = x2\,,\quad F1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F1\,(x) = x2 + \varepsilon\, x$

і має вигляд

$$Ft\,(\,ut\,) = \{\,st : st \in \mathbb{R},\, st = ut\;2 + t\,\varepsilon\,ut\,\},$$

можна отримати, якщо взяти гладкі ізотопії

$H : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R} \times I,\quad Ht\,(x) = \{\,ut : ut \in \mathbb{R},\;\; ut = x - t\,\varepsilon\,/\,2\,\}$ і

$h: \ \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R} \times I, \ \ ht\,(\mathrm{z}) = \{\, st : st \in \mathbb{R},\ st = z - t\,2\,\varepsilon 2 / 4 \,\}.$

Перевіримо виконання умови

$$Ft = ht \circ F0 \circ Ht - 1$$

з означення диференційовно ізотопних функцій. Так,

$Ht - 1\,(ut) = \{\, x : x \in \mathbb{R},\ x = ut + t\,\varepsilon / 2 \,\},$

$F0 \circ Ht - 1\,(ut) = \{\, z : z \in \mathbb{R},\ z = (\,ut + t\,\varepsilon / 2)2 \,\},$

$ht \circ F0 \circ Ht - 1\,(ut) = \{\, st : st \in \mathbb{R},\ st = ut\,2 + t\,\varepsilon\,ut \,\},$

тобто умова виконується.

Відтак, доведено, що функції $F0$ і $F1$ диференційовно ізотопні. Зауважимо, що функція $F1\ (x) = x2 + \varepsilon\,x$ отримана малим порухом («шевелением») функції $F0\ (x) = x\ 2$ і є їй диференційовно еквівалентною.

П р и к л а д 3. Інша гладка гомотопія, яка зв'язує ті ж функції

$F0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F0\,(x) = x2\,, \quad F1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F1\,(x) = x2 + \varepsilon\,x,$

отримана за допомогою гладких ізотопій образа і прообраза функції $F0$, які відображають координати вершин парабол:

$Ht\,(x) = (1 - t\,)\,x + t\,(\,x - \varepsilon / 2\,),\ ht\,(z) = (1 - t\,)\,z + t\,(\,z - \varepsilon\,2 / 4\,).$

Таким чином, ізотопія прообраза

$Ht\,(x) = \{\, ut : ut \in \mathbb{R},\ ut = x - t\,\varepsilon / 2 \,\}$

та ж, що і в прикладі 2, а ізотопія прообраза

$ht\,(\mathrm{z}) = \{\, st : st \in \mathbb{R},\ st = z - t\,\varepsilon\,2 / 4 \,\}.$

і гомотопія відображень

$Ft\,(ut) = ht \circ F0 \circ Ht - 1\,(ut) =$

$$= \{ s_t : s_t \in \mathrm{R},\ s_t = u_t^{\,2} + t\,\varepsilon\, u_t + \mathrm{t}\,(\,\mathrm{t} - 1)\,\varepsilon^2/4\}$$

інші, отримані більш природнім, порівняно з прикладом 2, чином.

П р и к л а д 4. Функції

$F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F_0(x) = x^4 \quad$ і $\ F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad F_1(x) = x^2$

є неперервно ізотопними на $\mathbb{R}$ і диференційовно ізотопними на $\mathbb{R} \setminus 0$.

Ізотопії образів і прообразів можна обрати так:

$H_t(x) = \{ u_t : u_t \in \mathbb{R},\ u_t = x - t\,(\,y(x) - x\,)\}$, де

$y(x) = x^2$, якщо $x \geq 0$, $y(x) = -\,x^2$, якщо $x < 0$,

$h_t(\mathrm{z}) = \{ s_t : s_t \in \mathbb{R},\ s_t = z\,\}$.

П р и к л а д 5. Функції

$F_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad F_0(x) = x\,y \quad$ і $\ F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad F_1(x) = -\,x^2 + y^2$

є диференційовно ізотопними. Гладка гомотопія

$$F_t : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R},\ F_t = (1 - t\,)\,F_0 + t\,F_1,$$

яка задається через координати

$$F_t(x) = \{s : s \in \mathbb{R}, s = x\,y - t\,x\,y - t\,x^2 + t\,y^2\,\},$$

і зв’язує $F_0(x)$ і $F_1(x)$, не є вказаною в означенні, оскільки не виражена через ізотопії h і H.

П р и к л а д 6. Гладка гомотопія, виражена через гладкі ізотопії образів і прообразів функцій

$F_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_0(x,y) = x\,y\ $ і $\ F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_1(x,y) = -\,x^2 + y^2,$

дозволяє отримати, зокрема, диференційовно еквівалентні функції.

А саме, якщо обрати ізотопії

$H_t(x,y) = \{\,(u_t, v_t) : (u_t, v_t\,) \in \mathbb{R}^2,\ u_t = x - t\,y,\ v_t = tx + y\,\},$

$ht\,(\mathrm{z}) = \{\, st : st \in \mathbb{R},\;\; st = z + 3t\,z \,\}$

і визначити

$Ht - 1\ (ut, vt\,) =$

$= \{\, (x,y) : (\,x,y) \in \mathbb{R}\ 2,\ x = (\,ut + t\ vt\,)\ /\ (1 + \mathrm{t}\ 2),\ y = (\,vt - t\ ut\,)\ /\ (1 + \mathrm{t}\ 2)\},$

то гладка гомотопія, що поєднує $F0$ і $F1$, матиме вид

$Ft\ (ut, vt\,) = ht \circ F0 \circ Ht - 1\ (ut, vt\,) =$

$= \{st : st \in \mathbb{R},\;\; st = ((1 + 3\ t)\ /\ (1 + t\ 2\ )\ 2)\ (\ (1 - t\ 2\ )\ ut\ vt + t\ (\ vt\ 2 - ut\ 2))\}.$

При кожному значенні t функція st буде диференційовно еквівалентною функціям $F0$ і $F1$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Шарко В.В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.

[2] Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. – М. : Мир, 1974. – 208 с.