УДК 519.21

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМУ ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ В R^1

К.С. Акбаш

Для широкого класса функций получена точная нижняя граница в законе повторного логарифма для схемы максимуму в $\boldsymbol{R^1}$.

Закон повторного логарифму (ЗПЛ) для сум незалежних випадкових величин Бернуллі вперше був установлений Хінчиним [1]. У подальшому ЗПЛ для сум довільних незалежних випадкових величин (н.в.в.) інтенсивно досліджувався.

Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ послідовність н.в.в. з функцією розподілу $F(x)$ і нехай F має додатну похідну $F'(x)$ для достатньо великих x. Покладемо $z_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$. Відомо [2,3], що асимптотична поведінка $\{z_n\}$ тісно пов'язана з поведінкою при $x \to \infty$ функцій $f(x)$ та $g(x)$ визначених рівностями

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}, \tag{1}$$

$$g(x) = f(x) \ln\ln\left\{\frac{1}{1 - F(x)}\right\}.$$

В роботі [2] при умові

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = 0 \tag{2}$$

був отриманий наступний ЗПЛ для схеми максимуму

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 1 \text{ м. н.} \tag{3}$$

$$\operatorname{liminf}_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 0 \text{ м. н.} \tag{4}$$

де $a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $F^{-1}(y) = \inf\{x: F(x) \ge y\}$ – обернена до $F(x)$.

Покладемо $R(x) = -\ln(1 - F(x))$ або $F(x) = 1 - \exp(-R(x))$.

Звичайно $R(x)$, як і $F(x)$, диференційована функція і

$$R'(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{f(x)}, \forall x > x_0. \tag{5}$$

Порівняння ЗПЛ (3)-(4) із класичним ЗПЛ дозволяє висунути припущення, що рівність (4) можна уточнити.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ визначена рівністю (1). Якщо виконується одна з умов:*

(1). $f(x)$ правильно змінюється при $x \to \infty$ і $\forall t \in (0,1)$

$$\int_1^{\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(tx)} < \infty \tag{6}$$

(2). $h(x) = f(R^{-1}(x))$ правильно змінюється при $x \to \infty$,

то

$$limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\, ln\, ln\, n} = 1 \text{ м.н.} \tag{7}$$

$$liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\, ln\, ln\, ln\, n} = -1 \text{ м.н.} \tag{8}$$

Зауваження 1. *Умова (6) добре відома [4]. Вона достатня для відносної стійкості майже напевне z_n, тобто при виконанні умови [4]*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{a_n} = 1\right) = 1. \tag{9}$$

Для доведення теореми 1 буде використано декілька допоміжних лем.

Лема 1 *[4]. Нехай (ξ_i) – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$. Нехай (u_n) така неспадна послідовність дійсних чисел, що послідовність $n[1 - F(u_n)]$ також є неспадною. Крім того, припустимо, що функція $F(x)$ неперервна. Тоді при $u_n < \omega(F)$, де $\omega(F) = sup(x{:}F(x) < 1)$, ймовірність*

$P(z_n \leq u_n \text{ н.ч.р.})$

дорівнює нулю або одиниці у відповідності з тим, збігається чи розбігається ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}[1-F(u_j)]\,exp\{-j[1-F(u_j)]\} \quad (10)$$

де н.ч.р. – нескінченне число раз.

***Лема 2** [5]. Нехай* (ξ_i) *послідовність незалежних випадкових величин з функцією розподілу* $F(x)=1-\exp(-x)$*. Тоді майже напевне*

$$limsup_{n\to\infty}\frac{z_n-\ln n}{ln\,ln\,n}=1 \text{ м.н.} \quad (11)$$

$$liminf_{n\to\infty}\frac{z_n-\ln n}{ln\,ln\,ln\,n}=-1 \text{ м.н.} \quad (12)$$

***Лема 3** [6]. Нехай* $H(x)$ *правильно змінюється при* $x\to\infty$, $c_n\to\infty$, $d_n\to\infty$, $\frac{c_n}{d_n}\to 1$, *при* $n\to\infty$*. Тоді*

$$\frac{H(c_n)}{H(d_n)}\to 1.$$

Доведення теореми 1. (1). Нехай τ стандартна експоненційно розподілена в.в., $P(\tau<x)=1-\exp(-x)$, $x>0$, (τ_i). $z_n^e=\max_{1\le i\le n}\tau_i$.

Нехай ξ в.в. з ф.р. $F(x)=1-exp(-R(x))$, що задовольняє умову *(1)* теореми 1, (ξ_i) незалежні копії ξ, $z_n=max_{1\le i\le n}\xi_i$.

Добре відомо [2], що $\tau=^d R(\xi)$, а отже $z_n^e=R(z_n)$. Позначення $\xi_1=^d\xi_2$ означає однакову розподіленість в.в. ξ_1 та ξ_2. Зрозуміло, що $a_n=R^{-1}(\ln n)$. Тоді, враховуючи (5), маємо

$$z_n^e-\ln n=^d R(z_n)-R\big(R^{-1}(\ln n)\big)=R(z_n)-R(a_n)=\frac{z_n-a_n}{f(\theta_n a_n+(1-\theta_n)z_n)},$$

$$0\le\theta_n\le 1.$$

Звідси

$$\frac{z_n^e-\ln n}{\ln\ln\ln n}=^d\frac{f(a_n)}{f(\theta_n a_n+(1-\theta_n)z_n)}\left(\frac{z_n-a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n}\right), n\ge 3. \quad (13)$$

За рівністю (9) при $n\to\infty$

$$\frac{\theta_n a_n+(1-\theta_n)z_n}{a_n}\to 1 \text{ м.н.}$$

Оскільки $f(x)$ правильно змінюється, то за лемою 3

$$\frac{f(a_n)}{f(\theta_n a_n + (1-\theta_n) z_n)} \to 1 \text{ м.н.} \tag{14}$$

У відповідності з лемою 2 для послідовності (z_n^e) виконуються рівності (11)-(12). Збираючи разом (13), (14) та (12) одержуємо рівність (8).

(2) Міркування тут подібні наведеним вище. Маємо $\xi =^d R(\tau)$, і таким чином $z_n^e =^d R^{-1}(z_n^e)$.

Далі запишемо

$$z_n - a_n =^d R^{-1}(z_n^e) - R^{-1}(\ln n) = (z_n^e - \ln n) f(R^{-1}(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e))$$

звідси

$$\frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n} =^d \frac{z_n^e - \ln n}{\ln\ln\ln n}\left(\frac{h(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e)}{h(\ln n)}\right), n \geq 3. \tag{15}$$

Відомо [4], що при $n \to \infty$

$$\frac{z_n^e}{\ln n} \to 1 \text{ м.н.}$$

$h(x)$ правильно змінюється при $x \to \infty$ і таким чином за лемою 3

$$\frac{h(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e)}{h(\ln n)} \to 1 \text{ м.н.} \tag{16}$$

Співвідношення (15), (16) та (12) дають рівність (8). Рівність (7) у обох випадках *(1)* та *(2)* отримуємо аналогічно.

ПОСИЛАННЯ

[1] Khintchin A. Uber einen Staz der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Fund.math. – 1924. – Vol. 6. – №1. – P. 9-12.

[2] L. de Haan The rate of growth of sample maxima. // Ann. Math. Statist. – 1972. – V.43. – P.1185-1196.

[3] Pickands J. Sample sequences of maxima. // Ann. Math. Statist. – 1967. – V.38. – P.1570-1574.

[4] Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. // М.:Москва, 1984. – 451 с.

[5] Акбаш К.С., Мацак І.К. Одне уточнення закону повторного логарифму для схеми максимуму. // Укр. мат. журн. – 2012. – Т.64. – №8. – С.1132-1137.

[6] Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г. Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. // Теорія ймовірност. та мат. статист. – 2004. – Вип.70. – С.9-25.